М.И. Жидкова, Н.Е. Пишкова, А.А. Холявко

Математика: элективные курсы для учащихся 8–11 классов общеобразовательных учреждений

ВЫПУСК 9

Методическое пособие по математике для учащихся и учителей

Публикуемые в настоящем сборнике методические материалы разработаны для реализации программ дополнительного образования по математике для участников очной сессии Хабаровской краевой заочной физико-математической школы.

Хабаровск: КГБОУ ДОД «Хабаровский краевой центр развития творчества детей и юношества», 2014. – 54 с. Тираж 70 экз.

СОДЕРЖАНИЕ

Жидкова М.И. к.ф-м.н.,
доцент кафедры ММиИТ ДВИУ РАНХиГС

РЕШЕНИЕ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ ПЛАНИМЕТРИИ

Рассмотрим ряд утверждений (теорем) планиметрии, которые довольно часто используются при решении задач. В первую очередь вспомним теорему о медиане прямоугольного треугольника, а также обратную ей теорему.

Медиана прямоугольного треугольника

Теорема 1. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

Теорема 2 (обратная). Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

Задачи

1. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 4. Найдите радиус описанной окружности.

2. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении 1:2. Найдите стороны треугольника.

3. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами 8 и 9. Найдите стороны треугольника.

4. В треугольнике ABC к стороне AC проведена высота BK и медиана MB, причем $AM=MB$. Найдите косинус угла KBM, если AB=1, BC=2.

5. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC$). В нем проведена биссектриса AD, и через точку D проведен перпендикуляр к AD до пересечения со стороной AC в точке M. Докажите, что $CD = \frac{1}{2} AM$.

6. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу в отношении 1:3. Найдите острые углы треугольника.

Удвоение медианы

Во многих случаях для решения задач удобно применить дополнительное построение, с которым мы сначала познакомимся на примере следующей задачи.

Задача. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Известно, что $\frac{\sin\angle ABM}{\sin\angle CBM} = \frac{1}{2}$. Найти отношение $\frac{BC}{AB}$.

Решение. На продолжении медианы BM за точку M отложим отрезок MD, равный BM (рис. 1).

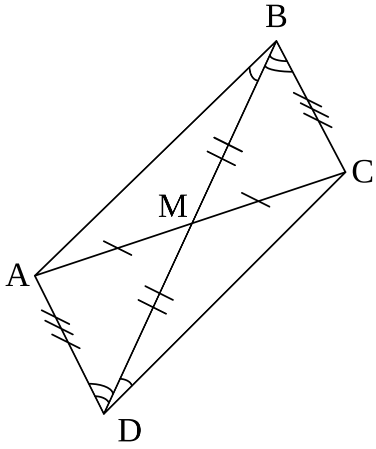

Рис. 1

Диагонали AC и BD четырехугольника делятся точкой пересечения пополам, значит $ABCD$ – параллелограмм. Поэтому $AD=BC$ и $\angle ADB = \angle CBM$. По теореме синусов из треугольника ABD находим, что $\frac{AD}{AB} = \frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle ADB} = \frac{\sin\angle ABM}{\sin\angle CBM} = \frac{1}{2}$.

Следовательно, $\frac{BC}{AB} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Дополнительное построение, которое мы применили, будем называть *удвоением медианы*.

Задачи

1. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{15}$, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 2.

2. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

3. Докажите, что медиана меньше полусуммы сторон, между которыми она расположена.

Параллелограмм

Приведем основные факты (утверждения, теоремы), связанные с параллелограммом.

1) Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник (рис. 2).

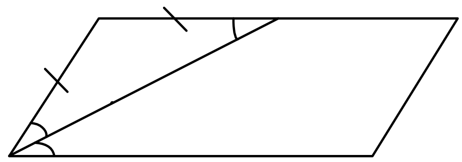

Рис. 2

2) Угол между биссектрисами двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, - прямой (или, биссектрисы двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, перпендикулярны). То же самое можно сказать о биссектрисах двух внешних углов параллелограмма (рис. 3).

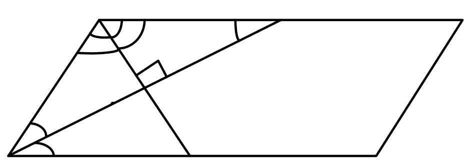

Рис. 3

3) Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон, т. е. для параллелограмма *ABCD* имеем $BD^2 + AC^2 = 2(AB^2 + AD^2)$.

Этот результат легко получается применением теоремы косинусов к треугольникам *ABD* и *ACD*.

4) Середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Задачи

1. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* длина отрезка, соединяющего середины сторон *AB* и *CD*, равна 1. Прямые *BC* и *AD* перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей *AC* и *BD*.

2. Прямая имеет с параллелограммом *ABCD* единственную общую точку B. Вершины A и C удалены от этой прямой на расстояния, равные a и b. На какое расстояние удалена от этой прямой вершина *D*?

3. Вершины одного параллелограмма лежат по одной на сторонах другого. Докажите, что центры параллелограммов совпадают.

Трапеция

Приведем основные факты (утверждения, теоремы), связанные с трапецией. Докажите эти утверждения.

1) Треугольники *ABO* и *CDO* равновелики (см. рис. 4).

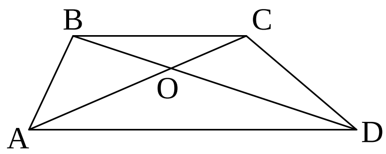

Рис. 4

2) *Замечательное свойство трапеции.* Четыре точки (точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений ее боковых сторон и середины оснований трапеции) лежат на одной прямой (см. рис. 5).

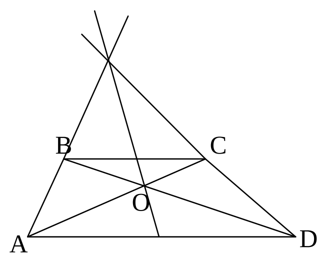

Рис. 5

3) Если в трапеции сумма углов при одном из оснований равна 90^0, то отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований, т. е. (см. рис. 6) если $\angle A + \angle D = 90^0$, E и F – середины оснований, то $EF = \frac{1}{2}(AD - BC)$.

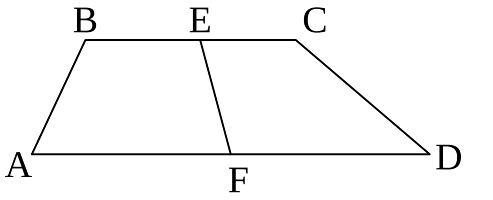

Рис. 6

4) На любом отрезке (ML), параллельном основаниям трапеции (см. рис. 7), диагонали трапеции отсекают равные отрезки (MN=KL). Это следует из того, что подобны треугольники $\Delta ABC \sim \Delta AMN$ и $\Delta DBC \sim \Delta DKL$, а также из того, что коэффициенты подобия равны k; тогда $MN = k \cdot BC$ и $KL = k \cdot BC$.

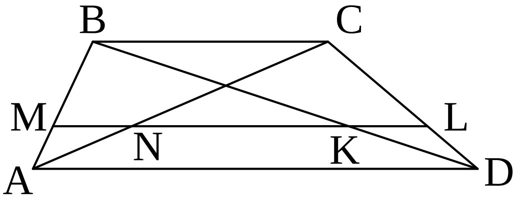

Рис. 7

5) Во всякой трапеции отрезок, соединяющий середины диагоналей, параллелен основаниям трапеции и равен их полуразности.

6) Во всякой трапеции сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов боковых сторон и удвоенного произведения оснований трапеции.

Задачи

1. Найдите площадь трапеции, параллельные стороны которой равны 16 и 44, а непараллельные – 17 и 25.

2. Найдите площадь трапеции с основаниями 11 и 4 и диагоналями 9 и 12.

3. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее средняя линия равна 5.

4. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна a, средняя линия равна b, а углы при большем основании равны 30^0. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

5. Основания трапеции равны 4 и 16. Найдите радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.

Как находить высоты, медианы и биссектрисы треугольника

Если дан треугольник, длины сторон которого равны a, b, c, то длина m_c медианы, проведенной к стороне c, вычисляется по формуле

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Можно знать эту формулу (она легко запоминается), либо знать, как она выводится. А выводится она довольно быстро.

В самом деле, рассмотрим треугольник со сторонами a, b, c (рис. 8) и к каждому из двух треугольников, на которые разбивает его медиана m_c, применим теорему косинусов:

$$a^2 = m_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2m_c \cdot \frac{2}{c} \cdot \cos\alpha,$$

$$b^2 = m_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2m_c \cdot \frac{2}{c} \cdot \cos\alpha.$$

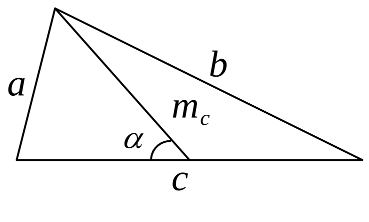

Рис. 8

Складывая почленно, получим $a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \dfrac{c^2}{2}$, откуда

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Высоту прямоугольного треугольника, проведенную из вершины прямого угла, удобно находить так: вычислить двумя способами площадь треугольника – как половину произведения катетов и как половину произведения гипотенузы на искомую высоту. Таким образом, высота h прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна произведению катетов ab, деленному на гипотенузу с: $h = \frac{ab}{c}$.

Задачи

1. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 8. Найдите высоту, опущенную на гипотенузу.

2. Дан треугольник со сторонами a, b и b. Найдите высоту, опущенную на сторону, равную b.

3. Дан треугольник со сторонами 13, 14, 15. Найдите высоту, проведенную к большей стороне.

4. Стороны треугольника равны a и b, а угол между ними равен γ. Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины этого угла.

5. Вычислите биссектрису треугольника ABC, проведенную из вершины A, если BC=18, AC=15, AB=12.

6. Докажите следующую теорему.

Теорема. Квадрат биссектрисы треугольника равен произведению сторон, ее заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, на которые она разделена биссектрисой.

7. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на боковую сторону, разбивает ее на отрезки, равные 2 и 1, считая от вершины треугольника. Найдите эту высоту.

8. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Найдите биссектрису, проведенную из вершины прямого угла.

9. Расстояния от точки M, лежащей внутри треугольника ABC, до его сторон AC и BC соответственно равны 2 и 4. Найдите расстояние от точки M до прямой AB, если AB=10, BC=17, AC=21.

10. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равна 10, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12.

11. В треугольнике ABC на стороне AC как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону AB в точке M, а сторону BC – в точке N. Известно, что $AC=2$, $AB=3$, $AM:MB=2:3$. Найдите AN.

2. ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

Олимпиадные задачи по геометрии очень разнообразны. Это задачи и на разрезание, и на построение, и на нахождение углов. Но чаще всего встречаются задачи, для решения которых надо применить какую-то необычную идею, при этом наиболее часто используемая из этих идей – дополнительное построение.

Задача 1. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E – такие, что $\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = 2$ и $\angle ACB = 2\angle DEB$ (рис. 9). Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

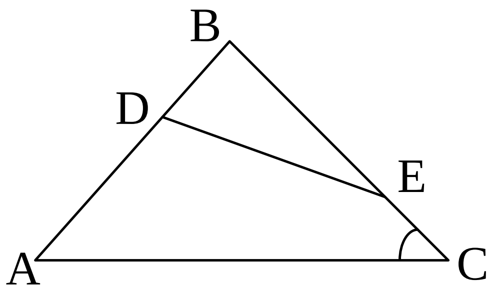

Рис. 9

Доказательство. Для решения задачи выполним дополнительное построение: проведем CF – биссектрису угла C треугольника ABC (см. рис. 10).

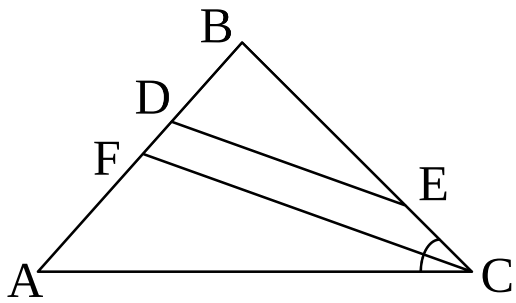

Рис. 10

Так как $\angle DEB = \frac{1}{2}\angle ACB = \angle FCB,$ то прямые ED и CF параллельны. По теореме Фалеса $\frac{BF}{BD} = \frac{BC}{BE}$. Учитывая, что по условию $\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = 2$, имеем $\frac{BF}{BD} = \frac{BC}{BE} = \frac{3}{2}$. Значит, $\frac{BF}{AB} = \frac{BF}{BD} \cdot \frac{BD}{AB} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$, то есть CF является и медианой треугольника. *А* так как *CF* в треугольнике *ABC* является биссектрисой и медианой, то треугольник *ABC* – равнобедренный с основанием *AB*, что и требовалось доказать.

Сложность решения данной задачи заключается не только в том, что надо догадаться провести биссектрису треугольника, но и в том, что в ней используется теорема Фалеса и признак равнобедренного треугольника.

<u>*Задача 2.*</u> В четырехугольнике *ABCD* (см. рис. 11) углы при вершинах *B* и *D* – прямые, *AB=BC*, а высота *BH* равна 1 дм. Найдите площадь четырехугольника.

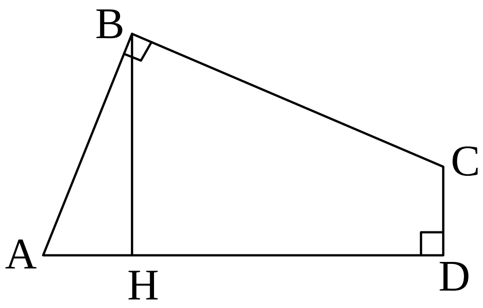

Рис. 11

<u>*Решение.*</u> Выполним два дополнительных построения (см. рис. 12):

- проведем прямую *BK*, параллельную прямой *AD*;

- продолжим отрезок *DC* за точку *C* до пересечения с прямой *BK*.

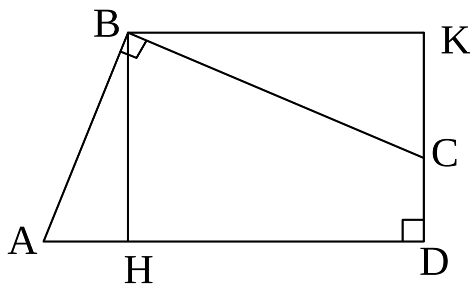

Рис. 12

В результате получим два равных треугольника *ABH* и *CBK* (они прямоугольные, *AB=BC*, $\angle ABH = \angle KBC = 90^0 - \angle HBC$), поэтому *BK*=*BH*=1 дм. Тогда площадь четырехугольника *ABCD* равна площади квадрата *HBKD* со стороной 1 дм, то есть $1дм^2$.

<u>*Ответ:*</u> $1дм^2$.

Для решения данной задачи пришлось выполнить два дополнительных построения: проведение прямой, параллельной одной из данных в условии задачи, и продолжение отрезка за один из его концов.

При решении олимпиадных задач применяются следующие методы дополнительных построений:

- метод вспомогательного отрезка (продолжение некоторого отрезка за один из его концов, часто на расстояние, равное длине данного отрезка; проведение медианы, высоты, биссектрисы треугольника; средней линии треугольника, трапеции; построение перпендикуляра к прямой);

- метод вспомогательной прямой (проведение через точку прямой, параллельной другой прямой и т. д.);

- метод вспомогательных фигур (в частности окружности и др.).

Иногда решить олимпиадную задачу по геометрии позволяет применение необычной идеи: решение задачи с конца с предварительным дополнительным построением. Рассмотрим конкретный пример.

Задача 3. Точку внутри квадрата соединили с вершинами – получилось четыре треугольника, один из которых равнобедренный, с углами при основании 15^0. Докажите, что противоположный ему треугольник правильный.

Доказательство. Пусть *ABCD* – квадрат, точка *M* находится внутри его, причем $\angle MDC = \angle MCD = 15^0.$ Решим обратную задачу. Построим на стороне *AB* квадрата равносторонний треугольник так, что вершина *N* лежит внутри квадрата (см. рис. 13). Тогда треугольник *CNB* – равнобедренный с вершиной *B*. Его угол при вершине равен 30^0, а значит, угол при основании равен $\frac{180^0 - 30^0}{2} = 75^0.$ Отсюда $\angle DCN = 90^0 - 75^0 = 15^0.$ аналогично получаем, $\angle CDN = 15^0.$ Значит, точка *N* лежит на луче *CM* и на луче *DM* и, следовательно, совпадает с точкой *M*.

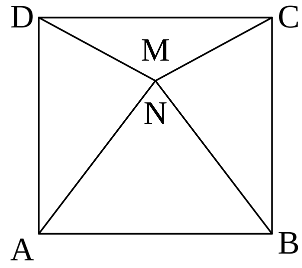

Рис. 13

Иногда проблемы при решении олимпиадных задач возникают из-за незнания фактов, которые изучаются не в геометрии. Рассмотрим одну из таких задач.

<u>*Задача 4.*</u> На сторонах *AD* и *CD* квадрата *ABCD* со стороной 3 взяты две точки *M* и *N* соответственно так, что *MD*+*DN*=3. Прямые *BM* и *CD* пересекаются в точке *E*. Найти длину отрезка *NE*, если *ME*=4.

<u>*Решение.*</u> Обозначим *MD=x*, *DE=y* (см. рис. 14).

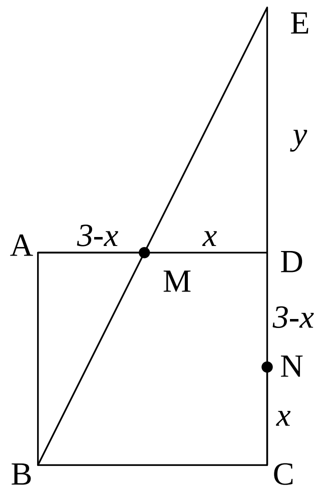

Рис. 14

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 3y + xy = 0, \\ x^2 + y^2 = 16. \end{cases}$$

Первое уравнение получим, учитывая, что площадь треугольника *BEC* равна сумме площадей треугольника *MED* и трапеции *BMDC*. Второе уравнение получим, применяя теорему Пифагора к треугольнику *MED*. (Если мы попытаемся решить эту систему подстановкой, то получим уравнение четвертой степени, корни которого иррациональны и найти их, используя школьные знания, тяжело. Как же быть?)

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} 3(x-y)+xy=0, \\ (x-y)^2+2xy=16. \end{cases}$$

Такая запись каждого уравнения системы делает очевидной замену, которую нужно выполнить, чтобы решить систему.

Пусть $x-y=u$ и $xy=v$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} 3u+v=0, \\ u^2+2v=16, \\ v>0. \end{cases}$$

Данную систему уравнений несложно решить с помощью подстановки, в результате имеем $u=-2, v=6.$

Возвратившись к переменным *x* и *y*, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x-y=-2, \\ xy=6. \end{cases}$$

Решением системы является пара чисел: $x=\sqrt{7}-1$, $y=\sqrt{7}+1$.

Так как *NE*=*ND*+*DE*=3-*x*+*y*=3+*(y*-*x)*, то *NE*=5.

Замечание. Для нахождения длины отрезка *NE* необязательно определять значения переменных *x* и *y*, достаточно заметить, что *y*-*x*=-*u*=2.

<u>*Ответ:*</u> 5.

При решении некоторых олимпиадных задач по геометрии применяют и специальные методы, которые позволяют найти изящное решение задачи. Один из них – метод вспомогательной окружности. Рассмотрим его суть на примере решения следующей задачи.

<u>*Задача 5.*</u> В треугольнике *ABC* $AD=l_a$ - биссектриса угла *A*, *CA*=*b*, *AB*=*c*. Докажите что $l_a<\sqrt{bc}$.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим вспомогательную окружность, описанную около треугольника *ABC*.

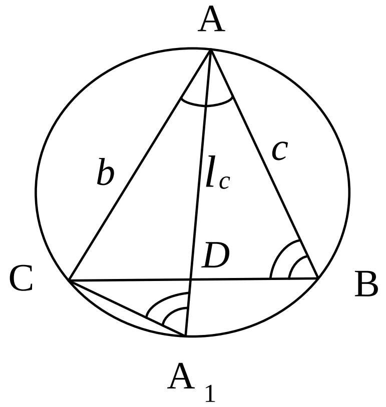

Рис. 15

Продолжив биссектрису *AD* до пересечения с окружностью в точке A_1 (см. рис. 15), получим треугольник ACA_1, подобный треугольнику *ADB* (по двум углам). Из подобия треугольников следует, что $\frac{b}{l_a} = \frac{l_a + DA_1}{c}$. Из этого равенства имеем $bc = l_a^2 + l_a \cdot DA_1 > l_a^2$, откуда $l_a < \sqrt{bc}$. Что и требовалось доказать.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами m и n. Найдите стороны треугольника.

2. В прямоугольном треугольнике *ABC* (угол *C* - прямой) проведены высота *CD* и медиана *CE*. Площади треугольников *ABC* и *CDE* равны соответственно 10 и 3. Найдите *AB*.

3. В прямоугольном треугольнике *ABC* катеты *AB* и *AC* равны 4 и 3 соответственно. Точка *D* делит гипотенузу *BC* пополам. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники *ADC* и *ABD*.

4. Катет прямоугольного треугольника равен 2, а противолежащий ему угол равен $30^0 30^0$. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники, на которые данный треугольник делится медианой, проведенной из вершины прямого угла.

5. В четырехугольнике *ABCD* диагонали *AC* и *BD* перпендикулярны и пересекаются в точке *P*. Отрезок, соединяющий вершину *C* с серединой *M* отрезка *AD*, равен 5/4, *AP*=1. Расстояние от точки *P* до отрезка *BC* равно 1/2. Найдите *AD* если известно, что вокруг четырехугольник *ABCD* можно описать окружность.

6. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны $50^0 30^0$ и $60^0 60^0$. Найдите основания и меньшую боковую сторону трапеции.

7. Средняя линия трапеции равна 4, углы при одном из оснований равны $40^0 40^0$ и $50^0 50^0$. Найдите основания трапеции, если отрезок, соединяющий середины оснований, равен 1.

8. В треугольнике *ABC* известны углы: $\angle A = 45^0$, $\angle B = 15^0$ $B = 15^0$. На продолжении стороны *AC* за точку *C* взята точка *M*, причем *CM=2AC*. Найдите угол *AMB*.

9. В треугольнике ABC известно, что $AB=AC$ и угол BAC тупой. Пусть BD – биссектриса треугольника ABC, M – основание перпендикуляра, опущенного из A на сторону BC, E – основание перпендикуляра, опущенного из D на сторону BC. Через точку D проведен также перпендикуляр к BD до пересечения со стороной BC в точке F. Известно, что $ME=FC=a$. Найдите площадь треугольника ABC.

10. Острый угол при вершине A ромба $ABCD$ равен 40^0 40^0. Через вершину A и середину M стороны CD проведена прямая, на которую опущен перпендикуляр BH из вершины B. Найдите угол AHD.

11. Две стороны треугольника равны 10 и 12, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 5. Найдите площадь треугольника.

12. Найдите площадь треугольника, медианы которого равны 3, 4, 5.

13. Медиана AD и высота CE равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$) пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $CP=5$, $PE=2$.

14. Медиана AM и биссектриса CD прямоугольного треугольника ABC (угол B - прямой) пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если $CO=9$, $OD=5$.

15. Внутри прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C отмечена точка O, причем $OA=OB=b$. Известно также, что CD – высота треугольника ABC, точка E – середина отрезка OC, $DE=a$. Найдите CE.

16. Дан треугольник ABC со сторонами $AB=3$, $AC=\sqrt{73}$ $\sqrt{73}$ и медианой $AM=4$.

а) Докажите, что медиана AM перпендикулярна стороне AB.

б) Найдите высоту треугольника ABC, проведенную из вершины A.

17. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M – середина стороны AB.

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$. $CM = \frac{1}{2}DK$

б) Найдите расстояние от точки M до центров квадратов, если AC=6, BC=10 и $\angle ACB = 30^0$ $ABC = 30^0$.

18. В трапеции $ABCD$ основания BC и AD относятся как 1:2. Пусть K – середина диагонали AC. Прямая DK пересекает сторону AB в точке L.

а) Докажите, что $AL=2BL$.

б) Найдите площадь четырехугольника $BCKL$, если известно, что площадь трапеции $ABCD$ равна 9.

19. Медианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC=3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что AC=30.

20. Медиана AM и высота CH равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$) пересекаются в точке K. Известно, что CK=5, KH=1.

а) Докажите, что $AH:BH$=1:4.

б) Найдите площадь треугольника ABC.

21. В треугольнике ABC проведены медианы AK и CM, $\angle BAK = \angle BCM = 30^0$. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

22. Угол между диагоналями трапеции равен 120^0. Одна из ее диагоналей равна 4, а высота трапеции равна 2. Найдите длину второй диагонали.

23. В ромбе $ABCD$ на отрезке BC находится точка E – такая, что $AE=CD$. Отрезок ED пересекается с описанной окружностью треугольника AEB в точке F. Докажите, что точки A, F и C лежат на одной прямой.

Пишкова Н.Е., преподаватель
кафедры математики и ИТ ДВГГУ

МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1. Уравнение $f(x;a)=0$ (неравенство $f(x;a)\vee 0$) называется *уравнением (неравенством)* с параметром *a* и переменной *x*, если ставится задача для каждого действительного числа *a*, решить это уравнение (неравенство) относительно *x*.

2. *Решить уравнение (неравенство)* с параметром *a* – это значит, для каждого действительного значения *a* найти значения *x*, удовлетворяющие этому уравнению (неравенству), или установить, что таких значений нет.

3. Значения параметра *a*, при которых уравнение $f(x;a)=0$ (неравенство $f(x;a)\vee 0$) качественно изменяется (меняется вид записи или изменяется количество корней) называются *контрольными значениями*.

<u>Примечания:</u>

1. Уравнение (неравенство) может быть и с несколькими параметрами, тогда не только для любого действительного значения каждого параметра необходимо найти *x*, но и установить взаимосвязь между параметрами.

2. Общих способов нахождения контрольных значений параметров и решения уравнений и неравенств нет, поэтому на конкретных примерах различных типов и видов уравнений и неравенств рассмотрим теоретические и практические основы уравнений и неравенств с параметрами.

3. Задачи, сводящиеся к решению уравнений (неравенств) с параметрами могут быть сформулированы по-разному. Самые распространенные формулировки: решить уравнение (неравенство) при всех *a*; установить количество корней уравнения (решений неравенства) в зависимости от *a*; при каких значениях параметра *a* корни уравнения (решения неравенства) удовлетворяют заданным условиям.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Пример 1. Решить уравнение $(a+a^2)x = a^2 - 5a + 4$

Решение. 1) Заменим данное уравнение равносильным ему: $a(a+1)x = (a+1)(a+4)$ ....(*)

2) Найдем контрольные значения параметра *a*: $a(a+1)=0$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$.

3) Решим уравнение (*) на каждом подмножестве действительных чисел: $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{-1\}$, $A_3 = \{a \neq 0,\ a \neq -1\}$.

а) Пусть $a = 0$, тогда уравнение (*) примет вид $0 \cdot x = 4$. Такое уравнение не имеет корней.

б) Пусть $a = -1$, тогда уравнение (*) примет вид $0 \cdot x = 0$. Корнями такого уравнения являются любые действительные числа.

в) Пусть $a \neq 0,\ a \neq -1$, тогда из уравнения (*) следует $x = \dfrac{a+4}{a}$.

4) Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

- если $a = 0$, то уравнение корней не имеет;

- если $a = -1$, то $x \in R$;

- если $a \neq 0,\ a \neq -1$, то $x = \dfrac{a+4}{a}$.

Пример 2. Решить неравенство $a(a+1)x > (a+1)(a+4)$.

Решение. 1) Найдем контрольные значения *a*: $a_1 = 0$, $a_2 = -1$.

2) Решим данное неравенство на каждом подмножестве множества действительных чисел: $A_1 = (-\infty;-1)$, $A_2 = \{-1\}$, $A_3 = (-1;0)$, $A_4 = \{0\}$, $A_5 = (0;\infty)$.

а) Пусть $a < -1$, из данного неравенства следует $x > \dfrac{a+4}{a}$.

б) Пусть $a = -1$, тогда данное неравенство примет вид $0 \cdot x > 0$, а такое неравенство не имеет решений.

в) Пусть $-1 < a < 0$, тогда из данного неравенства следует $x < \dfrac{a+4}{a}$, так как $a(a+1) < 0$.

г) Пусть $a = 0$, тогда данное неравенство имеет вид $0 \cdot x > 4$, но такое неравенство не имеет решений.

д) Пусть *a > 0*, тогда из данного неравенства следует $x > \frac{a+4}{a}$.

з) Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

- если $a < -1$ или $a > 0$, то $x > \frac{a+4}{a}$;

- если $a = 0$ или $a = -1$, то неравенство решений не имеет;

- если $-1<a<0$, то $x < \frac{a+4}{a}$.

Уравнения и неравенства, сводящиеся к линейным

Пример 3. Решить уравнение $\frac{1}{a} + \frac{3a-1}{x+2} = 2$

Решение. 1) Найдем область определения уравнения: $a \neq 0$, $x \neq -2$.

2) Решим данное уравнение относительно *x*, выполнив серию тождественных преобразований: $x + 2 + 3a^2 - a = 2ax + 4a \Leftrightarrow (1-2a)x = 2 + 3a^2 - 5a$

$\Leftrightarrow (1-2a)x = 3(a-1)(a-\frac{2}{3})$

а) если $a = \frac{1}{2}$, то корней нет; б) если $a \neq \frac{1}{2}$, то $x = \frac{3a^2-5a+2}{1-2a}$

3) Найдем те значения *a*, при которых найденный корень принимает значение равное –2, исключенное из области определения уравнения:

$$\frac{3a^2-5a+2}{1-2a} = -2 \Leftrightarrow 3a^2 - 9a + 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{6}$$

4) Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

- если $a \neq 0$, $a \neq \frac{1}{2}$, $a \neq \frac{9 \pm \sqrt{33}}{6}$, то $x = \frac{3a^2-5a+2}{1-2a}$;

- если $a = 0$ или $a = \frac{1}{2}$, или $a = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{6}$, уравнение решений не имеет.

Пример 4. Для каждого *a* найдите число корней уравнения $|x-1| = ax + 2$.

Решение. 1) Используя определения модуля действительного числа, заменим данное уравнение совокупностью двух смешанных систем и решим их:

а) $\begin{cases} x<1, \\ 1-x=ax+2; \end{cases}$ $\begin{cases} x<1, \\ (a+1)x=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x<1, \\ a\neq -1, \\ x=-\dfrac{1}{a+1}; \end{cases}$ $\begin{cases} -\dfrac{1}{a+1}<1, \\ a\neq -1, \\ x=-\dfrac{1}{a+1}; \end{cases}$

$\begin{cases} -\dfrac{a+1+1}{a+1}>0, \\ a\neq -1, \\ x=-\dfrac{1}{a+1}; \end{cases}$ $\begin{cases} -\dfrac{a+2}{a+1}>0, \\ a\neq -1, \\ x=-\dfrac{1}{a+1}; \end{cases}$ $\begin{cases} a<-2, a>-1, \\ x=-\dfrac{1}{a+1}. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x\geq 1, \\ x-1=ax+2; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 1, \\ x(1-a)=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 1, \\ a\neq 1, \\ x=\dfrac{3}{1-a}; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{3}{1-a}\geq 1, \\ a\neq 1, \\ x=\dfrac{3}{1-a}; \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{3-1+a}{1-a}\geq 0, \\ a\neq 1, \\ x=\dfrac{3}{1-a}; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{2+a}{1-a}\geq 0, \\ a\neq 1, \\ x=\dfrac{3}{1-a}; \end{cases}$ $\begin{cases} -2\leq a<1 \\ x=\dfrac{3}{1-a}; \end{cases}$

2) Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

- если $a < -2$, то $x=-\dfrac{1}{a+1}$;

- если $-2\leq a<-1$, то $x=\dfrac{3}{1-a}$;

- если $-1<a<1$, то $x_1=-\dfrac{1}{a+1}$, $x_2=\dfrac{3}{1-a}$;

- если $a\geq 1$, то $x=-\dfrac{1}{a+1}$.

Пример 5. Решить неравенство для каждого действительного a $\dfrac{2+3x}{x-a}>0$.

Решение. Так как $x=-\dfrac{2}{3}$ и $x=a$ - это те значения x, при переходе через которые меняется знак или числителя или знаменателя левой части данного неравенства, то и рассмотрим три случая взаимного расположения a и $-\dfrac{2}{3}$ на числовой прямой и для каждого случая найдем решение.

1) Пусть $a > -\frac{2}{3}$, тогда неравенство выполняется при $x > a$ или $x < -\frac{2}{3}$.

2) Пусть $a = -\frac{2}{3}$, тогда неравенство принимает вид $\frac{2+3x}{x+\frac{2}{3}} > 0$ или $\frac{3(2+3x)}{3x+2} > 0$ и выполняется при всех x, отличных от $-\frac{2}{3}$.

3) Пусть $a < -\frac{2}{3}$, тогда неравенство выполняется при $x < a$ или $x > -\frac{2}{3}$.

Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

- если $a > -\frac{2}{3}$, то $x > a$ или $x < -\frac{2}{3}$;

- если $a = -\frac{2}{3}$, то $x \in R$, кроме $x = -\frac{2}{3}$;

- если $a < -\frac{2}{3}$, то $x < a$ или $x > -\frac{2}{3}$.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Пример 6. Решить уравнение $(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$.

Решение. 1) Найдем первое контрольное значение a: $a-2=0$, $a_1=2$.

2) Пусть $a=2$, тогда данное уравнение примет вид: $4x+1=0$, т.е. $x=\frac{1}{4}$

3) Пусть $a\neq 2$, результат решения зависит от дискриминанта.

$$D=4a^2-4(2a-3)(a-2)=4a^2-8a^2+28a-24=-4a^2+28a-24=-4(a^2-7a+6).$$

а) $\begin{cases} a\neq 2, \\ -4(a^2-7a+6>0, \\ x=\dfrac{a\pm\sqrt{-a^2+7a-6}}{a-2}; \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} a\neq 2, \\ 1<a<6, \\ x=\dfrac{a\pm\sqrt{-a^2+7a-6}}{a-2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} a\neq 2, \\ -4(a^2-7a+6=0, \\ x=\dfrac{a}{a-2}; \end{cases}$ $\qquad$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=6, \\ x=1{,}5; \end{cases} \\ \begin{cases} a=1, \\ x=-1. \end{cases} \end{array}\right.$

в) $\begin{cases} a\neq 2, \\ -4(a^2-7a+6)<0, \\ \text{нет корней} \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} a>6 \text{ или } a<1, \\ \text{корней нет} \end{cases}$

4) Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

- если $a=2$, то $x=\frac{1}{4}$;

- если $1<a<2,\ 2<a<6$, то $x=\dfrac{a\pm\sqrt{-a^2+7a-6}}{a-2}$;

- если $a=1$, то $x=-1$;

- если $a=6$, то $x=1{,}5$;

- если $a>6$ или $a<1$, то корней нет.

Пример 7. При каких b уравнение $bx^2-2x\sqrt{15-b^2}-2=0$ имеет два различных действительных корня.

Решение. 1) Найдем область определения уравнения: $15-b^2\geq 0$ $\Leftrightarrow -\sqrt{15}\leq b\leq\sqrt{15}$.

2) Условие задачи будет выполняться, если

$$\begin{cases} b \neq 0, \\ D > 0, \\ |b| \leq \sqrt{15}; \end{cases} \quad \begin{cases} b \neq 0, \\ 15 - b^2 - 2b > 0, \\ |b| \leq \sqrt{15}; \end{cases} \quad \begin{cases} b \neq 0, \\ b^2 + 2b - 15 < 0, \\ |b| \leq \sqrt{15}; \end{cases} \quad \begin{cases} b \neq 0, \\ -3 < b < 5, \\ |b| \leq \sqrt{15}; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} -3 < b < 0, \\ 0 < b \leq \sqrt{15} \end{array} \right.$$

Ответ: $b \in (-3;0) \cup (0;\sqrt{15}]$

Пример 8. Решить неравенство $ax^2 + (2a-1)x + a \leq 0$

Решение. 1) Найдем контрольное значение a: $a = 0$.

2) Пусть $a = 0$, неравенство примет вид $x \leq 0$.

3) Пусть $a > 0$, тогда неравенство будет иметь решение только при условии, что дискриминант $D \geq 0$, т.е. $4a^2 - 4a + 1 - 4a^2 \geq 0 \Leftrightarrow -4a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{4}$.

Учитывая знак a, будем иметь $0 < a \leq \frac{1}{4}$, $\frac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{a} \leq x \leq \frac{1-2a+\sqrt{1-4a}}{a}$.

4) Пусть $a < 0$, тогда условие $a \leq \frac{1}{4}$ ($D \geq 0$) будет выполнено и решение исходного неравенства будет иметь вид $x \leq \frac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{a}$ или $x \geq \frac{1-2a+\sqrt{1-4a}}{a}$.

5) Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

- если $a < 0$, то $x \leq \frac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{a}$ или $x \geq \frac{1-2a+\sqrt{1-4a}}{a}$;

- если $a = 0$, то $x \leq 0$;

- если $0 < a \leq \frac{1}{4}$, то $\frac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{a} \leq x \leq \frac{1-2a+\sqrt{1-4a}}{a}$;

- если $a > \frac{1}{4}$, то неравенство решений не имеет.

Уравнения и неравенства, сводящиеся к квадратным

Пример 9. Решить уравнение: $x \cdot |x-2| - a = 0$

Решение. 1) Заменим данное уравнение совокупностью двух систем:

$$\text{а)}\begin{cases} x \ge 2, \\ x^2 - 2x - a = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 2, \\ x = 1 \pm \sqrt{1+a}; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1+\sqrt{1+a} \ge 2, \\ x = 1+\sqrt{1+a}; \end{cases} \\ \begin{cases} 1-\sqrt{1+a} \ge 2, \\ x = 1-\sqrt{1+a}; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \ge 0, \\ x = 1+\sqrt{1+a}; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{1+a} \le -1, \\ x = 1-\sqrt{1+a}; \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{cases} a \ge 0, \\ x = 1+\sqrt{1+a} \end{cases}$$

$$\text{б)}\begin{cases} x < 2, \\ -x^2 + 2x - a = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2, \\ x = 1 \pm \sqrt{1-a}; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1+\sqrt{1-a} < 2, \\ x = 1+\sqrt{1-a}; \end{cases} \\ \begin{cases} 1-\sqrt{1-a} < 2, \\ x = 1-\sqrt{1-a}; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 \le 1-a < 1, \\ x = 1+\sqrt{1-a}; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{1-a} > -1, \\ x = 1-\sqrt{1-a}; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a \le 1, \\ x = 1+\sqrt{1-a}; \end{cases} \\ \begin{cases} a \le 1, \\ x = 1-\sqrt{1-a}; \end{cases} \end{array}\right.$$

Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

- если $a < 0$, то $x = 1 - \sqrt{1-a}$;

- если $0 \le a \le 1$, то $x = 1 \pm \sqrt{1-a}$, $x = 1 + \sqrt{1+a}$;

- если $a > 1$, то $x = 1 + \sqrt{1+a}$.

Пример 10. Решить уравнение $\dfrac{x^2 - ax - a - 1}{x^2 - (3-2a)x - 6a} = 0$.

Решение. 1) Заменим данное уравнение равносильной ему системой:

$$\begin{cases} x^2 - ax - a - 1 = 0, \\ x^2 - (3-2a)x - 6a \ne 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем: $x_1 = a+1$, $x_2 = -1$; из второго неравенства получаем: $x \ne 3$, $x \ne 2a$.

2) Решим смешанную систему для каждого из возможных случаев:

$$\text{а)} \begin{cases} x = a+1, \\ a+1 \ne 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = a+1, \\ a \ne 2; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} x = a+1, \\ a+1 \ne -2a; \end{cases} \quad \begin{cases} x = a+1, \\ a \ne -\dfrac{1}{3}; \end{cases} \quad \text{в)} \begin{cases} x = -1, \\ -1 \ne -2a; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ a \ne \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

3) Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

- если $a \ne 2$, $a \ne -\frac{1}{3}$, $a \ne \frac{1}{2}$, то $x_1 = a+1$, $x_2 = -1$;

- если a = 2, то x = -1;

- если $a = -\frac{1}{3}$, то x = -1;

- если $a = \frac{1}{2}$, то x = 1,5.

Пример 11. Решить неравенство: $\frac{a}{x} > x + 2$.

Решение. Рассмотрим решение равносильного неравенства:

$$\frac{x^2 + 2x - a}{x} < 0.$$

1) $\begin{cases} x > 0, \\ x^2 + 2x - a < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ (x+1)^2 < a + 1. \end{cases}$

а) $\begin{cases} a = 0, \\ x > 0, \\ (x+1)^2 < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ x > 0, \\ -1 < x + 1 < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ x > 0, \\ -2 < x + 1 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ x \in \phi \end{cases}$

б) $\begin{cases} a > 0, \\ x > 0, \\ |x+1| < \sqrt{a+1}; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ x > 0, \\ -\sqrt{a+1} - 1 < x < \sqrt{a+1} - 1; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ 0 < x < \sqrt{a+1} - 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} a < 0, \\ x > 0, \\ |x+1| < \sqrt{a+1}; \end{cases}$ $\begin{cases} a < 0, \\ x > 0, \\ x \in \phi. \end{cases}$ $\begin{cases} a < 0, \\ x \in \phi. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x < 0, \\ x^2 + 2x - a < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0, \\ (x+1)^2 < a + 1. \end{cases}$

а) $\begin{cases} a = 0, \\ x < 0, \\ (x+1)^2 > 1; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x + 1 > 1, \\ x + 1 < -1; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x > 0, \\ x < -2; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ x < -2 \end{cases}$

б) $\begin{cases} -1 < a < 0, \\ x < 0, \\ |x+1| > \sqrt{a+1}; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 < a < 0, \\ x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{a+1} - 1, \\ x < -\sqrt{a+1} - 1; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} -1 < a < 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{a+1} - 1 < x < 0, \\ x > \sqrt{a+1} - 1. \end{array}\right. \end{cases}$

в) $\begin{cases} a = -1, \\ x < 0, \\ (x+1)^2 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a = -1, \\ x < 0, \\ x \neq -1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} a < -1, \\ x < 0, \\ (x+1)^2 > a + 1; \end{cases}$ $\begin{cases} a < -1, \\ x < 0, \\ x \in R; \end{cases}$ $\begin{cases} a < -1, \\ x < 0. \end{cases}$

д) $\begin{cases} a > 0, \\ x < 0, \\ |x+1| > \sqrt{a+1}; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{a+1} - 1, \\ x < -\sqrt{a+1} - 1; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ x < -\sqrt{a+1} - 1. \end{cases}$

3) Обобщим полученные результаты и запишем <u>ответ:</u>

- если $a < -1$, то $x < 0$; если $a = -1$, то $x < 0,\ x \neq -1$;

- если $-1 < a < 0$, то $x < -\sqrt{a+1} - 1$ или $\sqrt{a+1} - 1 < x < 0$;

- если $a = 0$, то $x < -2$;

- если $a > 0$, то $0 < x < \sqrt{a+1} - 1$ или $x < -\sqrt{a+1} - 1$.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Пример 12. Решить уравнение $\sqrt{x-a}=x-1$.

Решение. 1) Данное уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} x-1\ge 0, \\ x-a=(x-1)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 1, \\ x-a=x^2-2x+1; \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 1, \\ x^2-3x+a+1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 1, \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{5-4a}}{2} \end{cases}$$

2) Полученная смешанная система равносильна совокупности систем:

а) $\begin{cases} x\ge 1, \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5-4a}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{3+\sqrt{5-4a}}{2}\ge 1, \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5-4a}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{5-4a}\ge -1, \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5-4a}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} a\le -1{,}25 \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5-4a}}{2} \end{cases}$

б) $\begin{cases} x\ge 1, \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5-4a}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{5-4a}}{2}\ge 1, \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5-4a}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{5-4a}\le 1, \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5-4a}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 0\le 5-4a\le 1, \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5-4a}}{2}; \end{cases}$

$$\begin{cases} 1\le a\le 1{,}25 \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5-4a}}{2} \end{cases}$$

3) Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

- если $a<1$, то $x=\dfrac{3+\sqrt{5-4a}}{2}$;

- если $1\le a\le 1{,}25$, то $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5-4a}}{2}$;

- если $a>1{,}25$, то коней нет.

Пример 13. Для каждого a найти решения неравенства $(x-a)\sqrt{x-1}\ge 0$.

Решение. 1) Найдем область определения неравенства: $x\ge 1$ и заметим, что выражения $\sqrt{x-1}$ и $x-1$ одновременно в область определения либо положительны, либо равны нулю.

2) Заменим исходное неравенство равносильной системой неравенств $\begin{cases} x\ge 1, \\ (x-a)(x-1)\ge 0 \end{cases}$ и решим второе неравенство:

$$\text{а) } \begin{cases} a<1, \\ \left[\begin{array}{l} x\le a, \\ x\ge 1. \end{array}\right. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} a=1, \\ (x-1)^2\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a=1, \\ x\in R \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} a>1, \\ x\le 1, \\ x\ge a. \end{cases}$$

3) Решим систему: $\begin{cases} x\ge 1, \\ (x-a)(x-1)\ge 0; \end{cases}$

$$\text{а) } \begin{cases} x\ge 1, \\ a<1, \\ \left[\begin{array}{l} x\le a, \\ x\ge 1; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} a<1, \\ x\ge 1. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x\ge 1, \\ a=1, \\ x\in R; \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 1, \\ a=1, \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x\ge 1, \\ a>1, \\ \left[\begin{array}{l} x\ge a, \\ x\le 1; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>1, \\ x\ge a; \end{cases} \\ \begin{cases} a>1, \\ x=1. \end{cases} \end{array}\right.$$

4) Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

- если $a\le 1$, то $x\ge 1$;

- если $a>1$, то $x\ge a$ или $x=1$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решите уравнения:

а) $ax^2-(a-1)x+2a-1=0;$ б) $2x+3=2a+3x$; в) $\dfrac{x^2-(2a+1)x+a^2+a}{x-3}=0$.

2. Решите неравенства:

а) $ax^2+6x-4<0;$ б) $\dfrac{x^2-a}{x+3}\le 0$; в) $(x-3)(x+a)<0$.

3. При каких a уравнение $(a+2)x^2+2(a+2)x+2=0$ имеет единственный корень?

4. При каких a уравнение $a(x-1)=x-2$ имеет решение, удовлетворяющее условию $x>1$?

5. Найти все значения параметра *а,* при которых сумма кубов корней квадратного уравнения $x^2-ax+a=0$ больше суммы их квадратов.

6. Найти все значения параметра *а,* при которых сумма кубов корней квадратного уравнения $x^2-2ax+3a=0$ больше суммы их квадратов.

7. Найти все значения параметра *а*, при которых неравенство $\sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{\dfrac{2-x}{x+4}}\ge ax+2-\sqrt{\dfrac{x+1}{5-x}}$ не имеет решений.

8. Решить уравнение при всех допустимых значениях параметра *а*

$$x^2-4x\cos(x-a)+4=0$$

9. Найти все значения параметра *а*, при каждом их которых уравнение $8x^6+2x^2=(3x+5a)^3+3x+5a$ не имеет корней.

10. Найти все значения параметра *а*, при каждом их которых уравнение $27x^6+(4a-2x)^3+6x^2+8a=4x$ не имеет корней.

11. Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение $\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x-a\cos x}=a$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$

12. Сколько корней в зависимости от *а* имеет уравнение

$$4\sin^3 x=a+7\cos 2x\,?$$

13. При каком значении параметра a уравнение $(x-2a)\ln(x-1)=0$ имеет единственный корень?

14. Для каждого a решить неравенство $\log_{\sqrt{3}ctga}(x+1) > 2\log_{\sqrt{3}ctga}(x+1)$

15. Найти все значения параметра a, при которых на множестве решений неравенства $21x+|3x-a| \le 4a-x$ нет целых положительных решений

16. При каких положительных значениях a неравенство $x^4-6ax^2+5a^2 \le 0$ выполняется при всех x из заданного промежутка $[1;2]$?

17. При каких значениях параметра a неравенство $\left|\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}\right| < 3$ выполняется при любых x?

Холявко А.А.
Шмарин С.В.

ТЕОРИЯ ИГР ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Теория игр – обширный раздел прикладной математики, методы и математические инструменты которого выходят далеко за пределы школьного курса. Поэтому целью данного материала является формирование некоторого общего представления об игре как о математической модели; рассмотрение основных элементов игры, ряда методов нахождения выигрышных стратегий, а также определенной классификации этих игр.

Лучше всего начать с примера игры:

На столе лежит 15 конфет (либо других однородных предметов). Петя и Вася по очереди берут из общей кучи не менее одной и не более трех конфет. Выигрывает тот, кто возьмет своим ходом последнюю конфету. Может ли кто-то из ребят гарантированно выиграть, если первым ходит Петя?

Приведем возможный вариант развития событий: Петя берет две конфеты, затем Вася берет одну конфету; Петя берет три конфеты, Вася берет одну конфеты; Петя берет одну конфету, Вася берет три конфеты; Петя берет одну конфету, после чего остается три конфеты, которые своим ход берет Вася и выигрывает.

Можно заметить, что после хода каждого из игроков изменялось количество конфет, а также очередность хода. Таким образом, любую ситуацию в данной игре можно описать числом конфет (целое неотрицательное, не превосходящее 15) и игроком, который в данной ситуации ходит (Петя или Вася). Отметим, что одно и то же число конфет может получиться, как при ходе Пети, так и при ходе Васи. Например, если Петя возьмет три конфеты, то останется 12 конфет, а ход будет за Васей; с другой стороны, если Петя возьмет одну конфету, а Вася две, то конфет снова останется 12, но ход будет уже за Петей. Поэтому, число конфет и имя игрока описывают *строго единственную* игровую ситуацию.

Возможность описать игровую ситуацию однозначным образом с помощью конечного числа параметров, характерна для любой игры. Такую ситуацию называют *позицией*.

Петя и Вася ходят строго друг за другом. Не ходят одновременно и не делают несколько ходов подряд. Такие игры называются *последовательными*.

Кроме того, на возможные ходы также наложены ограничения: они не могут брать все конфеты сразу, разрезать их на части или вовсе не брать ни одной. Из условий четко следует, что можно брать одну, две или три конфеты. Для каждой игры характерны условия, накладываемые на возможные действия игроков, то есть ходы. По сути, ход игрока – это процесс перехода от одной возможной позиции к другой, согласно правилам игры.

Также для игр характерно наличие противоборствующих сторон и целей, которые они преследуют. В данной игре стороны две – это Петя и Вася (хотя для других игр участников может быть и больше). Цель – забрать последнюю конфету.

Для каждой игры должны быть определены все возможные результаты и способы их определения. Эти результаты называются *исходами*. В нашей игре их два: победа Пети или победа Васи. Стоит отметить, что эти исходы взаимно исключают друг друга: Вася и Петя не могут одновременно выиграть – выигрыш одного неминуемо ведет к проигрышу второго.

Кроме того, игровые позиции делятся на несколько групп, которые также характерны для большинства игр.

Начальные позиции – это позиции, в которых игра начинается. В нашей игре она описывается так: на столе 15 конфет, ход Пети. Начальная позиция для игры, как правило, единственная.

Заключительные позиции – это те позиции, в которых игра признается завершенной. Таких позиций может быть несколько и для каждой должен быть способ определения результата игры. В нашей игре заключительная позиция такова – на столе нет конфет и ход либо Пети, либо Васи. В зависимости от очереди хода определяется и результат.

Если при любых дальнейших действиях соперника из текущей позиции существует возможность свести игру к заключительной (не обязательно за один ход) позиции с победным для себя исходом, то такая позиция называется выигрышной. Аналогично определяется проигрышная позиция. Например, перед последним ходом Пети на столе осталось четыре конфеты. После его хода на столе останется либо три, либо две, либо одна конфета. В любой из этих ситуаций существует ход Васи, приводящий к его победе. Поэтому позиция с четырьмя конфетами и ходом Пети является выигрышной для Васи и, соответственно, проигрышной для Пети.

1. СТРАТЕГИИ. ПОИСК ВЫИГРЫШНОЙ СТРАТЕГИИ «С КОНЦА»

Игрок, делая свой ход, может руководствоваться интуицией или ходить как попало. А может, опираясь на некоторый алгоритм, основанный на правилах игры, текущей игровой ситуации, преследуемой им цели, предыдущих и возможных последующих ходах соперника, сужать круг возможных ходов до нескольких, а в идеале, до одного наилучшего. Будем называть такой алгоритм *стратегией*.

Если выбранная стратегия при любых дальнейших ходах оппонента приводить к победе, то будем называть такую стратегию *выигрышной*. Поиск выигрышных стратегий и является основной целью данного курса. Выигрышная стратегия может существовать, как в начальной позиции, так и быть следствием ошибочного хода другого игрока.

Вернемся теперь к задаче, поставленной во введении. Вопрос о существовании гарантированного пути к победе одного из игроков так и остался без ответа. Дадим его, воспользовавшись так называемым методом оценки игровых позиций «с конца». Суть его в том, что сначала каждая заключительная позиция оценивается в соответствии с правилами либо как «выигрышная», либо как «проигрышная». Всем последующим позициям присваивается оценка по следующему правилу: если из этой позиции существует ход в позицию отмеченную, как «проигрышная», то эта позиция оценивается, как «выигрышная»; если же любой ход из данной позиции ведет в «выигрышные» позиции, то такая позиция будет «проигрышной». Под «выигрышной» или «проигрышной» здесь подразумевается позиция, являющаяся таковой для игрока, который в этой позиции должен делать ход. Сделав ход из «выигрышной» в «проигрышную» позицию мы тем самым передали ход нашему сопернику, а он, следуя определению «проигрышной» позиции может сделать ход только в «выигрышную» позицию, в которой ход будет снова за нами. Оценивая так каждую возможную позицию, мы, в конце концов, оценим и начальную. Если она будет выигрышной, то первый игрок при правильной игре побеждает, если она будет проигрышной, то победит второй. А выигрышной стратегией будет являться любой возможный ход, приводящий позицию из текущей к «проигрышной», в случае, конечно, если текущая позиция сама не является таковой.

Вернемся к Пете, Васе и конфетам. Заключительная позиция (без учета очередности хода) у нас одна – нуль конфет. Тот, кто в ней ходит – проиграл. Значит, оцениваем её, как «проигрышную». Теперь рассмотрим все позиции, которые за один ход сводятся к заключительной. Поскольку возможные ходы – это взятие одной, двух или трех конфет, то получаем соответственно позиции с одной, двумя и тремя конфетами. Каждую из них за один ход можно свести к заключительной «проигрышной» позиции, значит, все они «выигрышные». Теперь рассмотрим позицию с четырьмя конфетами. Выше было написано, что она проигрышна для Пети, поскольку на любой его ход Вася сможет забрать оставшиеся конфеты. Это согласуется и с описанным алгоритмом оценки «с конца» - любой ход из позиции с четырьмя конфетами ведет к позиции, оцененной как «выигрышная». В свою очередь, к этой позиции можно свести позиции с пятью, шестью и семью конфетами. Данные позиции будут «выигрышными».

Рассуждая далее, получим, что 8 конфет – «проигрышная» позиция; 9, 10, 11 конфет – «выигрышные»; 12 – снова «проигрышная»; а 13, 14, 15 – «выигрышные» позиции.

Неудобство данного метода в том, что нужно рассматривать и оценивать каждую позицию. А что если конфет будет не 15, а 100 или больше? Возможно, в разобранном примере прослеживается какая-то закономерность? Давайте посмотрим на найденные «проигрышные» позиции – это количество конфет равное 0, 4, 8 и 12. Что между ними общего? Все они делятся на четыре. Это наталкивает на мысль, что количество конфет в «проигрышных» позициях должно делиться на четыре (для удобства будем называть такие позиции «кратные четырем»). Докажем это. По определению «проигрышной» позиции из неё нельзя перейти в другую проигрышную позицию за один ход. Из позиции «кратной четырем» также нельзя перейти в другую позицию «кратную четырем», поскольку для этого нужно взять не меньше четырех конфет, что по условию игры невозможно. С другой стороны, из любой «выигрышной» позиции должен быть ход в «проигрышную». Позиции не «кратные четырем» - это позиции, где число конфет при делении на четыре дает остатки один, два и три. Значит в них за один ход, можно всегда взять число конфет равное остатку и свести позицию к позиции «кратной четырем». Что и требовалось доказать.

Отсюда получаем выигрышную стратегию – если текущее количество конфет не делиться на четыре, то своим ходом нужно взять столько конфет, чтобы оставшееся число делилось на четыре. Если же текущее число делиться на четыре, то выигрышной стратегии нет. Тогда, если начальное число конфет делиться на четыре, то выигрышную стратегию имеет второй игрок, в противном случае – первый.

Заметим, что число 15 не делиться на 4, поэтому, взяв 3 конфеты, Петя мог перейти в выигрышную для себя ситуацию. Но он сделал ошибочный ход, позволив выиграть Васе, который, в отличие от него, делал только верные ходы, сводя игру к позициям с 12, 8 и 4 конфетами.

Эта игра с 15 предметами и возможностью брать не менее одного и не более трех предметов за ход, была описана еще 1612 году в книге «Занимательные и приятные числовые задачи» французского математика Баше де Мезирьяка. Игра стала называться «игра Баше», хотя была известна и до него. Эту игру можно обобщить до игры с N предметами и возможностью брать за ход не менее одного и не более K предметов. Здесь «проигрышным» позициям будут соответствовать позиции с числом предметов кратным $K+1$. Это доказывается точно так же, как и для случая, когда $K = 3$.

Метод поиска «с конца» лучше всего применять для рассмотрения частных случаев игры, когда оценить все позиции сравнительно несложно. А затем, на основании полученных оценок, попытаться найти закономерности и общие свойства «выигрышных» и «проигрышных» позиций, а также найти выигрышную стратегию для обобщенной игры.

Задачи к разделу

1. На доске написано число 60. За один ход разрешается уменьшить число на любой из его целых положительных делителей (в том числе на единицу или на само это число). Если при этом получается нуль, игрок проиграл. Найти выигрышную стратегию за одного из игроков.

2. На столе лежат две кучки спичек. В одной 21 спичка, в другой – 20. Игроки ходят по очереди. За один ход можно взять любое количество спичек из одной из кучек (по выбору игрока). При этом не разрешается оставлять поровну спичек в кучках (за исключением случая, когда спичек не осталось вовсе). Кто не может сделать ход, проигрывает. Найти выигрышную стратегию за одного из игроков.

3. Часы показывают полдень. Двое играющих по очереди переводят часовую стрелку на два или на три часа вперед. Если после хода игрока стрелка указывает на 6, он выиграл. Найти выигрышную стратегию за одного из игроков.

4. Игровое поле представляет собой горизонтальную полоску размером 1*100 клеток. В самой левой клетке стоит фишка. двое по очереди двигают фишку вправо, причем за один ход разрешается сдвинуть фишку вправо на расстояние от 1 до 10 клеток. Проигрывает тот, кто не может сделать ход (т.е. перед его ходом фишка находится в самой правой клетке). Кто выиграет при правильной игре?

5. Двое играют в такую игру: на столе лежат 7 монет по два фунта и 7 монет по одному фунту. За ход разрешается взять монет на сумму не более трех фунтов. Забравший последнюю монету выигрывает. Кто победит правильной игре? Тот же вопрос, если и тех, и других монет - по 12.

2. СИММЕТРИЧНЫЕ СТРАТЕГИИ

Рассмотрим следующую игру:

Двое игроков кладут одинаковые круглые монеты на прямоугольный стол; монеты могут свешиваться за край (но не должны падать) и не могут перекрываться. Кто не может положить монету, проигрывает. (Сдвигать ранее положенные монеты нельзя.)

В этой игре первый игрок может выиграть, положив свою монету в центр стола, а затем повторяя ходы второго симметрично относительно центра. (Симметрия относительно точки – поворот вокруг неё на 180°.) Если второму игроку удалось положить монету на пустое место так, что она не упала, то есть и пустое симметричное место, куда тоже можно положить монету (и она тоже не упадёт). И так далее, пока у второго игрока не останется возможности для хода.

Стоит отметить, что симметрия не обязательно должна быть геометрического плана. Она может иметь другой, связанный с конкретной игрой смысл. Например, в рассмотренной нами игре Баше, в проигранных позициях имеет место некоторая симметрия: в ответ на любой ход соперника, мы дополняем его до четырех. Можем сказать, что это своеобразная симметрия относительно четырех (в случае обобщенной игры Баше, относительно $K+1$).

Хотя, зачастую симметрия прослеживается именно в геометрическом смысле. Особенно, если игра происходит на каком-то игровом поле, представляющим собою геометрическую фигуру с осевой или центральной симметрией.

<u>Задачи к разделу</u>

1. Двое мальчиков играют в такую игру: они по очереди ставят ладьи на шахматную доску. Выигрывает тот, при ходе которого все клетки доски оказываются битыми, поставленными фигурами. Кто выигрывает, если оба стараются играть наилучшим образом?

2. На доске размером 8*8 двое по очереди закрашивают клетки так, чтобы не появлялось закрашенных уголков из трех клеток. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

3. На окружности расставлено 20 точек. За ход разрешается соединить любые две из них отрезком, не пересекающим отрезков, проведенных ранее. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Двое по очереди ставят коней в клетки шахматной доски так, чтобы кони не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

5. На квадратном поле размерами 99×99, разграфленном на клетки размерами 1×1, играют двое. Первый игрок ставит крестик на центр поля; вслед за этим второй игрок может поставить нолик на любую из восьми клеток, окружающих крестик первого игрока. После этого первый ставит крестик на любое из полей рядом с уже занятыми и т.д. Первый игрок выигрывает, если ему удастся поставить крестик на любую угловую клетку. Доказать, что при любой игре второго игрока первый всегда может выиграть.

3. ИГРЫ, ОСНОВАННЫЕ НА РАЗЛИЧНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИДЕЯХ

Порой вся игра может быть иллюстрацией некоторой математической идеи или факта. Особенно часто это происходят в олимпиадных задачах, формулируемых в виде игр. Например:

Леша пишет на доске n натуральных чисел. Настя может выбрать и поменять местами любые два из них. Затем ей нужно расставить между этими числами арифметические знаки: не более одного знака сложения, не более одного знака вычитания, не более одной пары скобок и любое число знаков умножения. Если у Насти получится число, которое нацело делится на $2n$-1, тогда она победила. В противном случае выигрывает Леша. Может ли кто-то из ребят гарантировать себе победу?

Если среди написанных Лешей чисел окажется число кратное $2n-1$, то Настя легко выиграет, просто расставив между всеми числами знаки умножения.

Пусть Леша учел этот факт и не написал ни одного кратного $2n-1$ числа. Тогда, если среди его чисел есть два числа дающих одинаковые остатки при делении на $2n-1$ Настя опять может добиться победы. Если эти числа стоят рядом, она ставит между ними знак вычитания и заключает их в скобки. Тогда внутри скобок будет число кратное $2n-1$ и останется поставить на остальные места знаки умножения. Если эти числа не расположены рядом, то Настя поменяет одно из них с тем, что расположено рядом со вторым и ситуация сведется к уже рассмотренной.

Пусть Леша учел и этот факт, и все его числа имеют различные остатки при делении на $2n-1$, кроме того ни одно из них не имеет нулевого остатка. Таких остатков $2n-2$: от 1 до $2n-2$. Разобьем их на следующие пары: $(1, 2n-2), (2, 2n-3),\dots, (n-1, n)$. Сумма чисел в каждой такой паре равна $2n-1$, а всего пар $n-1$. Это значит, что если мы будем распределять наши n чисел с разными остатками по этим парам, то по принципу Дирихле, хотя бы два числа окажутся в одной паре и их сумма будет кратна $2n-1$. Тогда Насте останется заключить их в скобки и поставить между ними знак сложения, в случае, если они находятся рядом. Либо, сначала пометь местами одно из них с числом, соседним второму.

В любом из этих случаев Настя выигрывает, не нарушая ни одно из поставленных условий. Исключить же все три варианта Леша не сможет. Эта игра основана на том факте, что для любых *n* натуральных чисел будет выполняться одно из трех (может выполняться сразу несколько, но одно из них будет выполняться наверняка): либо какое-то из этих чисел делится на $2n\text{-}1$; либо разность каких-то двух из них делится на $2n\text{-}1$, либо сумма каких-то двух из них делится на $2n\text{-}1$. Это позволяет Насте, играя по сформулированным правилам всегда добиваться победы.

В подобных играх также бывает полезно рассматривать простые частные случае в попытке найти общую идею.

4. ИГРЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПОЗИЦИЙ

Когда мы рассматривали игру Баше, мы отметили, что любую возникающую в ней позицию можно охарактеризовать целым неотрицательным числом предметов от *0* до N. Поскольку в каждой такой игре число N будет фиксированным, то и число возникающих позиций будет конечным. Это удобно для анализа. Давайте теперь рассмотрим такую игру:

Костя и Рома играют в следующую игру. На доске написаны два числа: $\frac{1}{2014}$ *и* $\frac{1}{2013}$. *На каждом ходу Костя называет любое положительное действительное число* x, *а Рома увеличивает одно из чисел на доске (какое захочет) на* x. *Костя выигрывает, если в какой-то момент одно из чисел на доске станет равным 1. Сможет ли Костя выиграть, как бы ни действовал Рома?*

В данной игре каждую позицию будут характеризовать два действительных числа, которые написаны на доске после текущего хода Ромы. Поэтому существует бесчисленное множество позиций, которые могут возникнуть. С другой стороны, пусть a – наибольшее из чисел, написанных в текущий момент на доске, Костя называет число $x > 1 - a$, тогда Рома увеличивает a на x, получая число больше одного. Затем, какое бы число Костя не называл, Рома будет увеличивать только это число, таким образом, Костя не сможет добиться поставленной цели. Значит, чтобы этого избежать, Костя должен всегда называть число из диапазона $(0, 1 - a]$. Поэтому, несмотря на то, что число позиций и может быть бесконечно, все они находятся в ограниченной области.

Представим данную задачу в несколько ином виде. Пусть на числовой прямой отмечена точка с координатой 1, а в точках с координатами $\frac{1}{2014}$ и $\frac{1}{2013}$ стоят игровые фишки. Костя называет число положительное действительное x, а Рома двигает любую из фишек в точку с координатой, которая больше её текущей координаты на число x. Задача Кости – вынудить Рому переместить одну из фишек в точку с координатой 1.

А теперь попробуем разбить отрезок [0,1] на равные отрезки так, чтобы точки $\frac{1}{2014}, \frac{1}{2013}$ и 1, оказались в концах этих отрезков. Косте достаточно будет каждый ход называть число, равное длине такого отрезка, тогда фишки будут перемещаться по этим концам до тех пор, пока одна из них не попадет в 1. Таким образом, задача сведется к игре с конечным числом позиций.

Иными словами нам нужно перейти к новым координатам. Длину такого отрезка обозначим за $\frac{1}{d}$, где $d > 1$, поскольку таких отрезков должно быть несколько в отрезке [0,1]. Тогда новая координата точки 1 будет равна: $1 : \frac{1}{d} = d$. Соответственно, новые координаты точек $\frac{1}{2014}$ и $\frac{1}{2013}$, будут равны $\frac{d}{2014}$ и $\frac{d}{2013}$. Чтобы все три точки имели целые координаты, достаточно взять d равное наименьшему общему кратному чисел 2013 и 2014, которое равно их произведению. Значит, отрезок [0,1] разобьется на новые единичные отрезки длинной $\frac{1}{2013 \cdot 2014} = \frac{1}{4054182}$. И Косте для выигрыша достаточно каждый раз называть число $x = \frac{1}{4054182}$. Это и будет его выигрышной стратегией.

Игру с бесконечным числом позиций, которые все же ограничены некоторой областью, зачастую бывает, возможно, свести к игре с конечным числом позиций, рассмотрев вместо позиций не числовые параметры, а параметры в виде отрезков и интервалов.

5. ИГРЫ С БОЛЕЕ ЧЕМ ДВУМЯ ИСХОДАМИ

До сих пор мы рассматривали только игры с двумя исходами – выигрыш одного или второго игрока. Но бывает, что двух исходов недостаточно. Например, если в игре возникают позиции, в которых ни одна из сторон за конечное число ходов не может достигнуть победы. Возьмем уже известную игру Баше и немного изменим условие. Пусть конфет будет по-прежнему 15, но брать нужно не менее ***двух*** и не более четырех. То есть одну конфету взять уже не получится. А значит, если останется одна конфета, то ни Петя, ни Вася не смогут добиться победы (взять последнюю конфету). Назовем такой исход «ничьей». В случае ничьей каждый из ребят будет получать одно очко, а в случае выигрыша победитель получит сразу два очка.

Проанализируем игру, используя метод оценки «с конца». Теперь у нас две заключительные позиции – нуль конфет и одна конфета. Первая позиция по-прежнему «проигрышная», а вторая по новому условию будет «ничейной». Так как у нас появился третий исход, то и правила оценки позиции надо изменить. «Выигрышной» позицией, как и раньше, будет позиция, из которой можно совершить ход в «проигрышную» позицию. А вот если такого хода нет, но есть ход в «ничейную» позицию, то такая позиция сама будет «ничейной». Например, из позиции с пятью конфетами, нельзя попасть в проигрышную позицию, но можно не дать сопернику выиграть, взяв четыре конфеты и сведя позицию к одной конфете. В самом деле, если у нас нет возможности победить, то мы все равно должны пытаться свести игру к максимально благоприятному для себя исходу, в данном случае к ничьей. Если же все ходы ведут в «выигрышные» позиции, то такая позиции, как и раньше, будет «проигрышной».

Анализ дает нам следующие результаты. «Выигрышные» позиции: 2, 3, 4, 8, 9, 10, 15 конфет. «Ничейные» позиции: 1, 5, 7, 11, 13 конфет. «Проигрышные» позиции: 0, 6, 12 конфет. Отметим, что здесь нет позиции с 14 конфетами, поскольку её невозможно достичь. Так же, начальная позиция является «выигрышной», поэтому Петя при правильной игре должен выиграть.

Еще следует добавить, что в отличие от обычной игры Баше, в подобной игре закономерности в позициях будут другими и заметить их сложнее. Возьмите, например, игру со 100 конфетами, а в качестве возможных ходов – взятие 5, 7 или 13 конфет.

Рассмотрим другой пример. Возьмем обобщенную игру Баше с N предметами и взятием от 1 до K предметов и добавим к Пете и Васе еще и Машу. Они будут играть втроем, делая ходы по очереди. Победитель по-прежнему тот, кто возьмет последний предмет, а остальные два будут проигравшими. Что же тогда произойдет?

Заключительная позиция не изменится – это по-прежнему нуль предметов. Оценка позиций от 1 до K также сомнений не вызывает – они все будут «выигрышными». Позиция $K+1$ однозначно оценивается, как «проигрышная», ибо на любой возможный ход текущего игрока, следующий за ним игрок обязательно выиграет.

Но вот уже в позиции $K+2$ однозначного ответа быть не может. Посудите сами. Предположим сейчас ход Маши, за ней должен ходить Петя, а после него Вася. Если Маша возьмет один предмет, то Пете достанется $K+1$ предмет, и он проиграет, а Вася выиграет. Если же Маша возьмет больше одного предмета, то выиграет уже Петя. Сама же Маша выиграть никак не может (только в случае, если оба мальчика ей галантно не поддадутся). Получается, что ни выигрыш Пети, ни выигрыш Васи в данной позиции от них самих не зависит. И если они вдруг анализировали эту игру, то дойдя до подобной позиции, они не смогут однозначно её оценить, а значит и оценить всю игру. И выигрышной стратегии тут быть не может. Кроме одной - всячески задобрить Машу и склонить чашу её предпочтения в свою пользу, но к математике это уже не будет иметь никакого отношения.

Выход здесь есть – добавим дополнительный исход. Скажем, что тот, кто забирает последний предмет, получает два очка, тот, кто ходил перед ним получает одно очко, а третий игрок ничего не получает. Тогда в ситуации с $K+2$ предметами у Маши не будет неопределенности – она возьмет больше одного предмета, позволив Пете выиграть. Она же при этом получит одно очко, что лучше, чем нуль, если бы она дала возможность выиграть Васе. Петя так же это понимает и будет стараться свести игру к $K+2$ предметам при ходе Маши, зная, что она будет стараться получить максимум очков и предпочтет «синицу в руках» тому, чтобы оставить его с этой «синицей», но самой при этом не получить ничего. Так получится, если она в этой позиции возьмет один предмет. При этом на любой ход Пети, Вася закончит игру, получив два очка. Петя же получит одно очко, как игрок, ходивший перед победителем. Ну а Маша не получит ничего.

Таким образом, все позиции от $K+1$ до $2K$ будут ничейными, поскольку за один ход их можно свести к позиции с количеством предметов не меньшим K, что позволит следующему игроку выиграть и получить два очка, а текущему получить одно очко. Дальнейший анализ и выявление выигрышной и «непроигрышной» (гарантированно дающей одно очко) стратегий предоставляется читателю. Он не так сложен.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Здесь были рассмотрены далеко не все методы нахождения выигрышных стратегий и не вся возможная классификация игр. Однако данного материала достаточно, чтобы иметь представление о математических играх, и о том, как к ним подступиться в поисках оптимальной стратегии. Следует помнить, что при рассмотрении возможных ответных ходов соперников, нужно учитывать, что они будут стремиться к максимально благоприятному для себя исходу и при любой возможности будут пытаться помешать друг другу добиться того же. Разумеется в рамках допустимых игровых возможностей.

При анализе полезным бывает построения таких возможных позиций, которые при любом возможном ходе, очевидно, приводят к поражению. Поиск симметрии или возможного повторения ходов за соперником, также может дать положительный результат поиска. Иногда некоторые игры могут иметь различную природу, но их позиции будут описываться одинаковым набором параметров, и наличие выигрышной стратегии у одной игры, будет означать наличие точно такой же стратегии у второй.

Игрой можно назвать, в принципе, практически любую конфликтную ситуацию с несколькими активными сторонами, которые имеют набор возможных действий и преследуют свои цели. Во многих сферах человеческой деятельности встречаются подобные ситуации. Они ставят перед теорией игр актуальные задачи, требующие решения.

ЗАДАЧИ

1. Двое играют в следующую игру. Каждый игрок по очереди вычеркивает 9 чисел (по своему выбору) из последовательности 1,2,...,100,101. После одиннадцати таких вычеркиваний останутся 2 числа. Первому игроку присуждается столько очков, какова разница между этими оставшимися числами. Доказать, что первый игрок всегда сможет набрать по крайней мере 55 очков, как бы ни играл второй.

2. У ромашки а) 12 лепестков; б) 11 лепестков. За ход разрешается сорвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает игрок, который не сможет сделать ход. Как действовать второму игроку, чтобы выиграть независимо от ходов первого игрока?

3. В каждой клетке доски 11×11 стоит шашка. За ход разрешается снять с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает тот, кто снимет последнюю шашку. Придумать стратегию. Указать несколько выигрывающих первых ходов.

4. Шахматный король стоит в левом нижнем углу шахматной доски. Участвуют два игрока, которые ходят по очереди. За один ход его можно передвинуть на одно поле вправо, на одно поле вверх или на одно поле по диагонали "вправо-вверх". Выигрывает игрок, который поставит короля в правый верхний угол доски. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

5. Петя и Вася играют на доске размером 7×7. Они по очереди ставят в клетки доски цифры от 1 до 7 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не оказалось одинаковых цифр. Первым ходит Петя. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из них сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

6. Имеется система уравнений

$$*x + *y + *z = 0,$$

$$*x + *y + *z = 0,$$

$$*x + *y + *z = 0.$$

Два человека поочерёдно вписывают вместо звёздочек числа. Доказать, что начинающий всегда может добиться того, чтобы система имела ненулевое решение.

7. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник 5x9. В левом нижнем углу стоит фишка. Коля и Серёжа по очереди передвигают ее на любое количество клеток либо вправо, либо вверх. Первым ходит Коля. Выигрывает тот, кто поставит фишку в правый верхний. Кто выигрывает при правильной игре?

8. На доске записаны числа 1, 2, 3, ..., 1000. Двое по очереди стирают по одному числу. Игра заканчивается, когда на доске остаются два числа. Если их сумма делится на три, то побеждает тот, кто делал первый ход, если нет – то его партнер. Кто из них выиграет при правильной игре?

9. На концах клетчатой полоски 1 × 20 стоит по шашке. За ход разрешается сдвинуть любую шашку в направлении другой на одну или на две клетки. Перепрыгивать шашкой через шашку нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию и какую?

10. Игра начинается с числа 1. За ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от 2 до 9. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1000. Найти выигрышную стратегию за одного из игроков.

11. Двое по очереди ставят ладей на шахматную доску так, чтобы ладьи не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто побеждает при правильной игре?

12. Числа от 1 до 20 выписаны в строчку. Игроки по очереди расставляют между ними плюсы и минусы. После того, как все места заполнены, подсчитывается результат. Если он четен, то выигрывает первый игрок, если нечетен, то второй. Кто победит при правильной игре?

13. На доске написаны 10 единиц и 10 двоек. За ход разрешается стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать двойку, а если разными - единицу. Если последняя оставшаяся на доске цифра - единица, то выиграл первый игрок, если двойка - то второй. Есть ли здесь выигрышная стратегия? Если есть, то какая?

14. На доске написаны числа 25 и 36. За ход разрешается дописать еще одно натуральное число - разность любых двух имеющихся на доске чисел, если она еще не встречалась. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Зависит ли результат игры от игроков? Почему?

15. Петя и Миша играют в такую игру. Петя берет в каждую руку по монетке: в одну — 10 копеек, а в другую — 15. После этого содержимое левой руки он умножает на 4, 10, 12 или 26, а содержимое правой руки — на 7, 13, 21 или 35. Затем Петя складывает два получившихся произведения и называет Мише результат. Может ли Миша, зная этот результат, определить, в какой руке у Пети — правой или левой — монета достоинством в 10 копеек? Почему?

16. Белая ладья преследует чёрного слона на доске 3×1969 клеток (они ходят по очереди по обычным правилам). Как должна играть ладья, чтобы взять слона? Первый ход делают белые. Начальные позиции могут быть любыми.

17. В одной куче 18 конфет, а в другой - 23. Двое играют в игру: одним ходом можно съесть одну кучу конфет, а другую разделить на две кучи. Проигравшим считается тот, кто не может сделать ход, т.е. перед ходом которого имеются две кучи из одной конфеты. Кто выигрывает при правильной игре.

18. Играют двое. Первый выписывает в строку слева направо цифры, произвольно чередуя 0 и 1, пока всех цифр не станет всего 1999. Каждый раз после того, как первый выписал очередную цифру, второй меняет между собой две цифры из уже написанного ряда (когда написана только одна цифра, второй пропускает ход). Всегда ли второй может добиться того, чтобы после его последнего хода расположение цифр было симметричным относительно средней цифры?

19. Игра начинается с числа 2. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число, меньшее его. Выигрывает тот, кто получит 1000.

20. Есть длинный ряд луночек. В трёх из них лежит по шарику. Игроки по очереди делают ход: берут один из крайних шариков и перекладывают в свободную луночку между двумя другими. Тот, кто не может сделать ход, считается проигравшим. Кто – начинающий игру или ходящий вторым – победит при правильной игре при показанных на рисунках первоначальных расположениях шариков?

а)

б)

в)

г) Разберите общий случай. Пусть между крайними шариками и средним имеется N и K пустых луночек. Кто победит (в зависимости от N и K)?