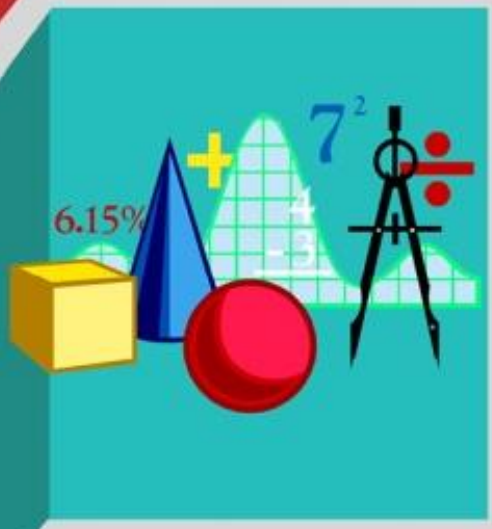
Министерство образования и науки Хабаровского края

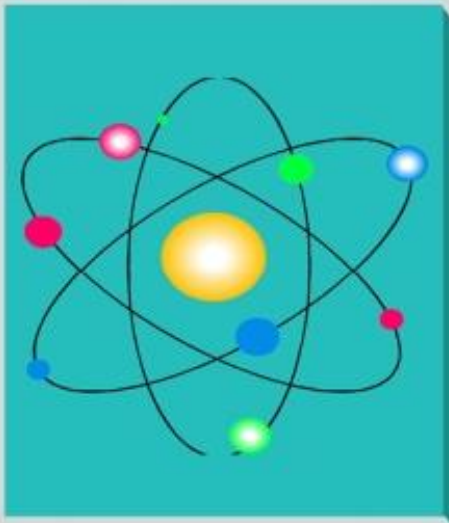
Краевое государственное автономное образовательное учреждение дополнительного образования
«Центр развития творчества детей
(Региональный модельный центр дополнительного образования детей Хабаровского края)»

Центр технического творчества

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Математика | Информатика | Физика





в школах Хабаровского края

МИФ

№ 1 (9) 2019 г.

Хабаровск
2019

Печатается по решению
научно-методического совета
КГАОУ ДО РМЦ,
протокол № 1 от 25.03.2019 г.

МИФ: математика, информатика, физика. Методические рекомендации / Сост. И.В. Воеводина. – Хабаровск: КГАОУ ДО РМЦ, 2019. – 33 с.

В данных методических рекомендациях представлены материалы по математике, информатике и физике.

Темы будут полезны учителям общеобразовательных организаций, педагогам дополнительного образования для работы с детьми с целью повышения интереса к физико-математическому образованию.

Ответственный редактор: В.В. Шевченко
Ответственный за выпуск: А.Ф. Немцев
Компьютерная верстка: В.Д. Шабалдина

Научные консультанты:
по математике: : Ю.В. Жулидова, заместитель декана по СВР факультета естественных наук, математики и ИТ, старший преподаватель кафедры математики и информационных технологий ФГБОУ ВО ПИ ТОГУ, г. Хабаровск;
по информатике: : Е.А. Редько, преподаватель кафедры математики и информационных технологий ФГБОУ ВО ПИ ТОГУ, г. Хабаровск;
по физике: Л.В. Горбанева, заместитель декана по УР факультета естественных наук, математики и ИТ, старший преподаватель кафедры физики ФГБОУ ВО ПИ ТОГУ, г. Хабаровск.

© КГАОУ ДО РМЦ, 2019

Содержание

ВВЕДЕНИЕ 4

ИНФОРМАТИКА
Редько Е.А.
Зачем учителю информатики треугольник Паскаля? 5

ФИЗИКА
Горбанева Л.В.
Научное физическое общество учащихся 16
Гаврилов А.В.
Избранные задачи краевых олимпиад по астрономии 17

МАТЕМАТИКА
Карпова И.В.
Элементы теории вероятностей и математической статистики 24

Список литературы 33

ВВЕДЕНИЕ

В данных методических рекомендациях представлены материалы педагогов высшего профессионального образования по математике, информатике и физике (астрономии).

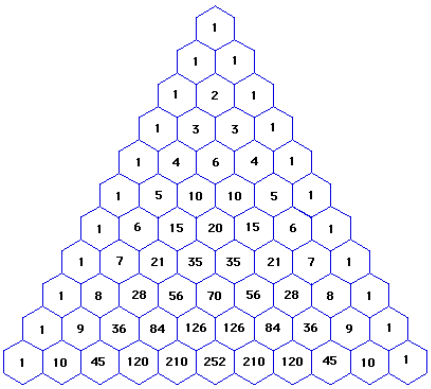
В разделе по информатике рассматривается треугольник Паскаля, какими свойствами он обладает, как можно его применить для решения задач, а также как его создать в программной среде.

Раздел по физике представлен материалами о научном обществе учащихся, которое может быть организовано в любой организации. Как строится работа научного общества учащихся можно рассмотреть на примере работы общества, созданного на базе кафедры физики педагогического института ФГБОУ ВО «Тихоокеанский государственный университет». Также в этом разделе представлены задачи по астрономии, рассмотрены методы их решения. С астрономией учащиеся знакомятся в курсе физики. Практические задачи не рассматриваются в рамках школьной программы за недостаточностью времени, а на факультативах и внеурочных занятиях педагоги могли бы не только рассматривать теоретические аспекты астрономических знаний, но и применение этих знаний при решении задач. В этом им поможет данный раздел.

Раздел математики посвящён одной из интересных тем — теории вероятности и статистики, алгоритмы вычисления вероятности и некоторых элементов математической статистики. Данный материал будет интересен не только преподавателям математики, но и исследователям для определения достоверности экспериментов.

ЗАЧЕМ УЧИТЕЛЮ ИНФОРМАТИКИ ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ?

Редько Е.А.,
старший преподаватель
кафедры математики и информационных технологий
ФГБОУ ВО ПИ ТОГУ



...Мой друг, моим словам не прекословь,
Взгляни: перед тобою треугольник —
Он интеллекта кладезь и питомник,
Где числа вниз бегут за рядом ряд.
Паскаль построил этот людный град
Из кирпичей бинома Исаака,
Сияющих, как звезды Зодиака...

Неизвестный автор, 2016 г.

Наша очередная тема: «Зачем учителю информатики треугольник Паскаля?» содержит вопросы, на которые мы обязательно найдём ответы...

Что такое треугольник Паскаля?

Замечательная математическая структура, подробно изученная Блезом Паскалем, достаточно подробно описывается и в современной литературе [1-5]. Определение треугольника Паскаля даётся конструктивно, то есть через способ построения (рис. 1):

– на вершине и по боковым сторонам треугольника записывают единицы;

– начиная со второй строки, каждый элемент строится, как сумма **двух** чисел, расположенных над ним (слева и справа);

– треугольник Паскаля снизу не ограничен (строки можно строить до бесконечности).

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1

Рисунок 1. Первые девять строк треугольника Паскаля

Какие практические приложения можно найти в треугольнике Паскаля?

Чем же так популярны числа, образующие треугольник Паскаля?

Рассмотрим свойства треугольника Паскаля и их приложения в различных задачах алгебры, комбинаторики, теории чисел. Обратим внимание на то, что данные математические разделы являются разделами дискретной математики, составляющей неотъемлемую математическую базу информатики.

Свойство 1. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел (из определения).

Свойство 2. Сумма чисел каждой строки является степенью двойки.

Номер строки		Сумма чисел в строке	Степень 2
0	1	1	2^0
1	1 +1	2	2^1
2	1 +2 +1	4	2^2
3	1 +3 +3 +1	8	2^3
4	1 +4 +6 +4 +1	16	2^4
5	1 +5 +10 +10 +5 +1	32	2^5
6	1 +6 +15 +20 +15 +6 +1	64	2^6
7	1 +7 +21 +35 +35 +21 +7 +1	128	2^7
8	1 +8 +28 +56 +70 +56 +28 +8 +1	256	2^8

Рисунок 2. Число 10 из 5 строки в шестой строке участвует дважды

Данное свойство легко доказать, что мы и сделаем.

По построению треугольника Паскаля — в нулевой строке записана единица (1), то есть нулевая степень любого числа. Мы будем считать, что это нулевая степень двойки (2^0).

Далее при переходе к первой строке эта единица «удваивается», так как записывается уже дважды слева и справа. Тогда сумма чисел в первой строке равна 2 или 2^1.

Итак, нулевая и первая степень двойки в соответствующих строках уже получены.

Далее надо показать, что каждая следующая строка является удвоенной предыдущей. Это действительно так, исходя из построения: каждое число из предыдущей строки входит в новую строку дважды: в левую сумму и в правую. ***Например,*** число 10 в пятой строке входит в следующую шестую строку, как слагаемое числа 15 (влево) и как слагаемое числа 20 (вправо), что на рисунке 2 показано стрелками.

Свойство 3. Сумма чисел, стоящих на чётных местах, равна сумме чисел, стоящих на нечётных местах, и каждая из них составляет 2^{n-1}.

Продемонстрируем это свойство на ***примере*** 8-й строки:

– выпишем числа, стоящие на чётных местах, начиная с нулевого: 1, 28, 70, 28, 1. Их сумма равна 128;

– выпишем числа, стоящие на нечётных местах, начиная с первого: 8, 56, 56, 8. Вычислим сумму: 128;

– видим, что суммы равны между собой;

– значение каждой суммы составляет ровно половину от суммы всех чисел строки, то есть $2^8/2$, или 2^{8-1}.

Доказательство этого свойства также опирается на определение треугольника Паскаля, то есть аналогично свойству 2.

Свойство 4. По строке треугольника Паскаля можно быстро записать соответствующую степень числа 11.

Для первых четырёх строк это свойство очевидно: если выписать все числа строки подряд и прочитать как одно число, то это число и является степенью 11:

$1=11^0$

$11=11^1$

$121=11^2$

$1331=11^3$

$14641=11^4$

Но, начиная с пятой строки, видим, что $15101051 \neq 11^5$, так как $11^5=161051$.

С каждой следующей строкой (после 4-й) придётся проводить дополнительную работу, а именно — переносить цифры из разряда десятков. Общее правило такое: если число треугольника Паскаля двузначное, то справа налево в старший разряд переносим количество десятков и складываем с числом, стоящим слева. Количество единиц оставляем в записи общей последовательности.

Рассмотрим на примере шестой строки (рис. 3):

	Переносов нет	Третий перенос влево +1	Второй перенос влево +2	Первый перенос влево +1		
1	6 ←	15 ←	20 ←	15	6	1
	=6+1=7 Оставляем	=15+2=17 Оставляем	=20+1=21 Оставляем	Оставляем		
1	7	7	1	5	6	1

Рисунок 3. Формирование цифр для записи шестой степени числа 11

Получили последовательность цифр $1771561=11^6$.

Свойство 5. Каждая строка треугольника Паскаля — это набор биномиальных коэффициентов разложения $(a + b)^n$ по степеням.

Продемонстрируем этот факт разложения на многочленах до 5-й степени включительно (рис. 4):

$(a+b)^0$	$\mathbf{1}$
$(a+b)^1$	$\mathbf{1}\cdot a \quad +\mathbf{1}\cdot b$
$(a+b)^2$	$\mathbf{1}\cdot a^2 \quad +\mathbf{2}\cdot ab \quad +\mathbf{1}\cdot b^2$
$(a+b)^3$	$\mathbf{1}\cdot a^3 \quad +\mathbf{3}\cdot a^2b \quad +\mathbf{3}\cdot ab^2 \quad +\mathbf{1}\cdot b^3$
$(a+b)^4$	$\mathbf{1}\cdot a^4 \quad +\mathbf{4}\cdot a^3b \quad +\mathbf{6}\cdot a^2b^2 \quad +\mathbf{4}\cdot ab^3 \quad +\mathbf{1}\cdot b^4$
$(a+b)^5$	$\mathbf{1}\cdot a^5 \quad +\mathbf{5}\cdot a^4b \quad +\mathbf{10}\cdot a^3b^2 \quad +\mathbf{10}\cdot a^2b^3 \quad +\mathbf{5}\cdot ab^4 \quad +\mathbf{1}\cdot b^5$

Рисунок 4. Разложение по степеням бинома $(a + b)^n$.

Даже если не знать комбинаторных формул получения биномиальных коэффициентов, то записать разложение *n*-й степени бинома по треугольнику Паскаля не составит труда.

Свойство 6. Теперь, когда мы знаем, что каждая строка треугольника Паскаля содержит набор биномиальных коэффициентов, можем рассмотреть эти же числа как значения ***числа сочетаний***.

Комбинаторная формула $C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ позволяет определять количество возможных способов выбрать *k* элементов из множества, содержащего *n* различных элементов. И содержится это число в *n*-й строке и в *k*-й диагонали треугольника Паскаля.

Например, в вашем гардеробе есть рубашка, футболка с коротким рукавом и футболка с длинным рукавом (лонгслив). Вы собираетесь одеть 2 вещи. Сколькими способами это можно сделать? Если просто перебирать варианты, то найдутся такие сочетания:

– футболка с длинным рукавом и рубашка;

– футболка с коротким рукавом и рубашка;

– футболка с длинным рукавом (лонгслив) и футболка с коротким рукавом.

Всего 3 варианта. Это же число нам «подскажет» треугольник Паскаля — на пересечении 3-й строки и 2-й диагонали находим число 3 (рис. 5).

Примечание: диагонали в треугольнике Паскаля также, как и строки, нумеруются с нуля!

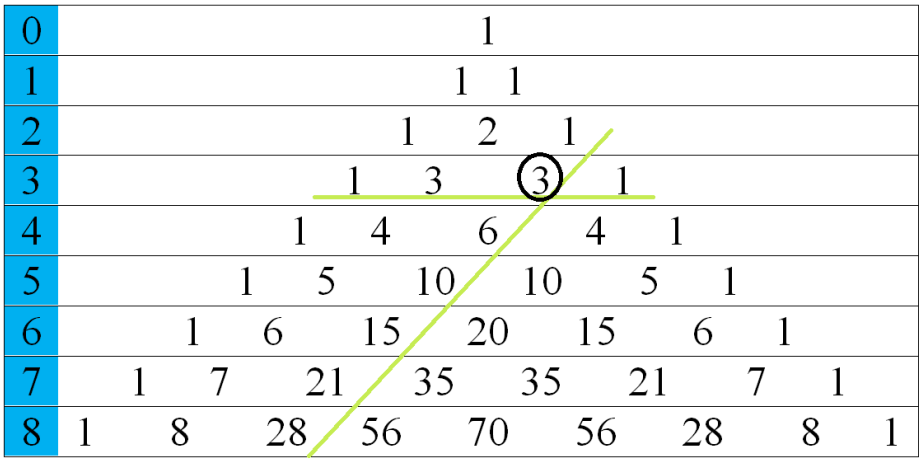


Рисунок 5. Находим число сочетаний из трёх предметов по 2

Какие ещё типы задач решаются с применением понятия и формулы числа сочетаний? Приведём несколько примеров, интересных с точки зрения информатики.

Задача 1.

Сколько существует двоичных последовательностей длины n, в которых ровно k единиц?

Задача 2.

На прямоугольном поле $k \times n$, разбитом на ячейки-квадратики, живет робот. Его задача состоит в прохождении этого поля от левого верхнего угла до правого нижнего (рис. 6). За 1 шаг робот может выполнять одну из двух команд: сместиться на 1 клетку вправо, или сместиться на 1 клетку вниз. *Сколько* возможных маршрутов для робота можно составить?

Решение этой задачи найдём по треугольнику Паскаля. Так как в нашем примере (рис. 6) $k = 4$ и $n = 6$, то в треугольнике Паскаля выделим прямоугольную область, состоящую из 4 правых диагоналей и 6 левых диагоналей (можно и наоборот, учитывая свойство симметрии). Представим, что эта прямоугольная область (рис. 7) моделирует клетчатое поле робота (теперь оно наклонено). Тогда вершина треугольника Паскаля — это отправная точка робота, а противоположная ей вершина выделенной области прямоугольника — точка, в которую робот должен прийти. В ней и находится то число, которое соответствует количеству возможных путей для робота.

И вопрос задачи в треугольнике Паскаля формулируется так: сколькими разными путями можно спуститься из вершины треугольника в k-й или $(n\text{-}k)$-й перекрёсток m-го ряда?

Обоснование такого решения состоит в том, что в каждую клетку своего поля робот может попасть из левой клетки или из верхней. В прямоугольной области треугольника Паскаля это две «клетки» сверху — левая и правая. А значит, число вариантов (маршрутов) складывается из суммы чисел, уже записанных в этих «клетках». Таким образом, основное свойство (принцип построения) треугольника Паскаля автоматически даёт нам решение задачи.

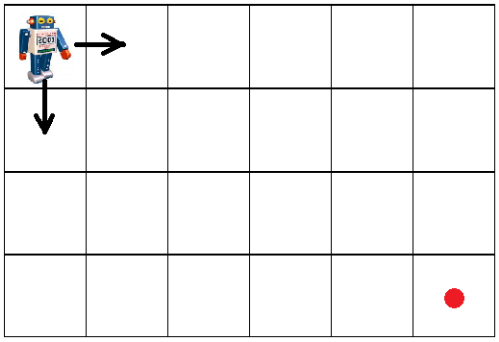


Рисунок 6. Поле робота

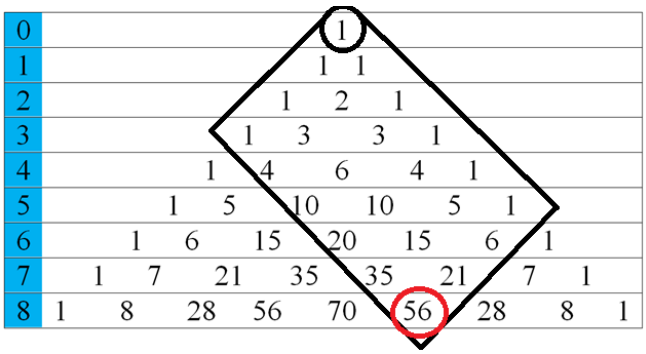


Рисунок 7. Модель поля робота на треугольнике Паскаля

Свойство 7. Если первые, рассмотренные нами шесть свойств треугольника Паскаля фиксируют факты относительно чисел строки, то далее мы рассмотрим те свойства, которыми обладают числа на так называемых диагоналях.

Следует различать диагонали, параллельные боковым сторонам треугольника (они симметричны друг другу относительно центральной линии треугольника Паскаля «равнобедренной» формы), и диагонали, проведённые в «прямоугольной» форме треугольника.

Итак, ***свойство 7*** — это свойство чисел на диагоналях, проведённых параллельно боковым сторонам «равнобедренной» формы треугольника:

- ✓ 1-я диагональ является просто последовательностью натуральных чисел;
- ✓ 2-я диагональ содержит ***треугольные*** числа.

Практически такие числа можно представить, если выкладывать рядами монетки одного размера по правилу: каждая монетка в нижнем (следующем) ряду касается ровно двух монеток из верхнего ряда (рис. 8).

В первом ряду кладём одну монетку. Треугольное число T_1 порядка 1 будет равно 1. Тогда треугольное число T_2 порядка 2 (два ряда монеток) будет равно 3 (т.е. содержит 3 монетки). Треугольное число T_3 порядка 3 (три ряда монеток) будет равно 6 (т.е. содержит 6 монеток). Треугольное число T_4 порядка 4 (четыре ряда монеток) будет равно 10 (т.е. содержит 10 монеток) и т.д.

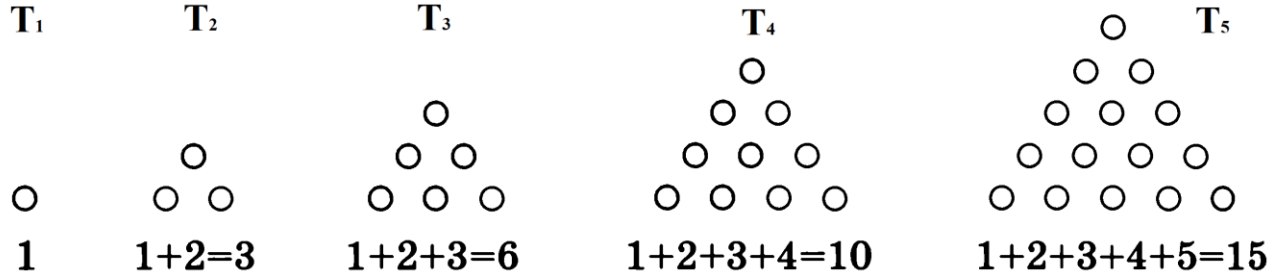


Рисунок 8. Треугольные числа и их графическая интерпретация

- ✓ 3-я диагональ содержит пирамидальные (тетраэдрические) числа.

Такие числа получаются, если складывать пирамидой шарики. Каждый слой в такой пирамиде — треугольное число.

На рисунке 9 представлено изображение пирамидального числа порядка 4. Всего шаров в такой пирамиде 20, и найти это значение можно в 4-й строке 3-й диагонали треугольника Паскаля.

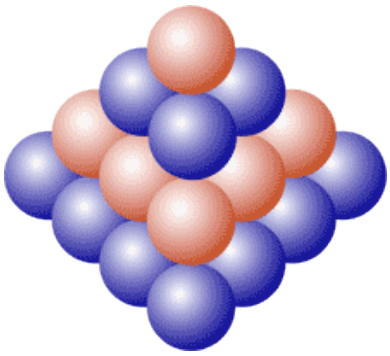


Рисунок 9. Пирамидальное число и его графическая модель

Общая формулировка для ***свойства 7***: Каждая k-я диагональ содержит «треугольные» числа из соответствующего k-мерного пространства.

Свойство 8. Построим треугольник Паскаля в прямоугольной форме (рис. 10) и проведём в нём диагонали справа налево и сверху вниз.

Теперь выпишем суммы чисел на каждой такой диагонали:

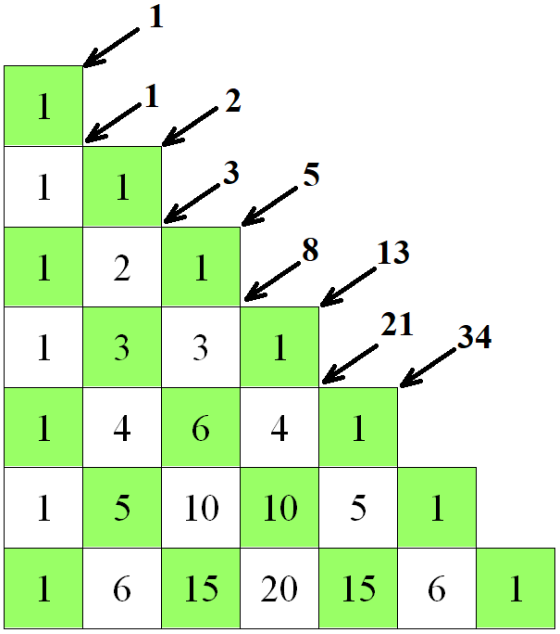


Рисунок 10. Диагонали в прямоугольной форме треугольника Паскаля

1
1
1+1=**2**
1+2=**3**
1+3+1=**5**
1+4+3=**8**
1+5+6+1=**13**
1+6+10+4=**21**
1+7+15+10+1=**34**
и т.д.

Получившийся ряд чисел называется ***числами Фибоначчи***. Каждое число в этой последовательности равно сумме двух предыдущих: $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$.

Итак, формулируем очередное ***свойство***: чтобы найти *n*-е число Фибоначчи по треугольнику Паскаля, надо сложить числа треугольника Паскаля, стоящие на *n*-й диагонали в прямоугольной его форме.

Примечание: и эти диагонали в треугольнике Паскаля нумеруются с нуля!

Рассмотрим одну из множества ***задач***, решение которой строится на получении соответствующего (номеру) числа Фибоначчи.

Лёша поднимается по лестнице из 10 ступенек. За один раз он прыгает вверх либо на одну ступеньку, либо на две ступеньки. Сколькими способами Лёша может подняться по лестнице?

Решение такой задачи надо начинать с меньших значений n, чем дано в условии.

1) Пусть Лёша поднимается на лестницу из одной ступеньки. Тогда у него есть ровно один вариант это сделать — шагнуть на 1 ступеньку. Обозначим это значение F(1)=1.
2) Далее рассмотрим лестницу, состоящую из двух ступенек. В этом случае у Лёши есть 2 варианта. Первый — прыгнуть сразу на две ступеньки. Второй — шагнуть на 1 ступеньку 2 раза. Обозначим это значение F(2)=2.
3) Следующий случай — лестница состоит из 3 ступенек:
    а) Пусть Лёша первым действием шагает на одну ступеньку. Тогда ему остаётся прошагать ещё 2 ступеньки этой лестницы. А сколько способов у него при этом есть, мы уже знаем — F(2).
    б) Либо Лёша первым действием прыгнет сразу на две ступеньки. Тогда ему останется пройти ещё одну. И мы также знаем количество вариантов для этого — F(1).
    в) Таким образом, чтобы вычислить количество способов пройти 3 ступеньки F(3), нам надо сложить F(2) и F(1). Получаем $F(3) = F(2) + F(1) = 2 + 1 = 3$.
4) Теперь мы можем обобщить эту схему на любое значение n: $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$. Тогда для задачи, в которой количество ступенек лестницы равно 10, ответом будет 10-е число Фибоначчи, то есть 89.

Ответ: Лёша может подняться по лестнице 10 способами.

Как увидеть в треугольнике Паскаля фрактал?

Рассмотрим ещё раз треугольник Паскаля в прямоугольной форме. Выполним раскраску «ячеек» треугольника следующим образом (рис. 11): нечётные числа будем закрашивать зелёным цветом, а чётные — белым.

1														
1	1													
1	2	1												
1	3	3	1											
1	4	6	4	1										
1	5	10	10	5	1									
1	6	15	20	15	6	1								
1	7	21	35	35	21	7	1							
1	8	28	56	70	56	28	8	1						
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1					
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1				
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1			
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1		
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1	
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	366	91	14	1

Рисунок 11. Треугольник Серпинского в треугольнике Паскаля

Очевидно, что треугольник содержит в себе некий узор. Чтобы убедиться в этом, необходимо построить треугольник Паскаля достаточно большой размерности. Вот, например, как будет выглядеть раскраска чётных/нечётных чисел треугольника Паскаля, содержащего 128 строк (рис. 12):

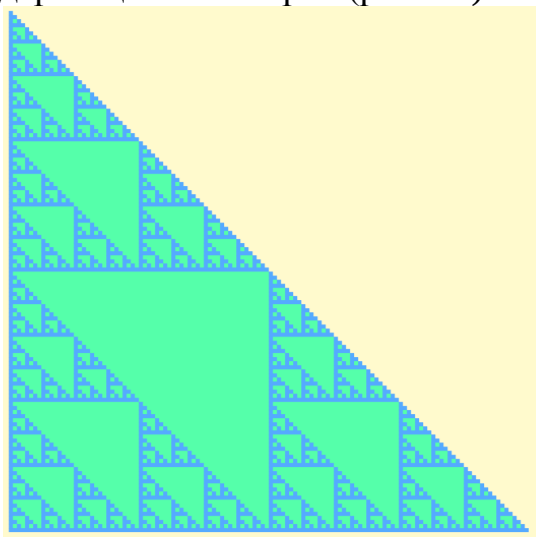


Рисунок 12. Раскраска треугольника Паскаля, содержащего 128 строк

Данный узор называется «ковёр Серпинского» и является геометрическим фракталом. Важным свойством треугольника Серпинского является его самоподобие — ведь он состоит из трёх своих копий, уменьшенных в два раза (это части треугольника Серпинского, содержащиеся в маленьких треугольниках, примыкающих к углам). Самоподобие — одно из характерных свойств фракталов. Удивительно, что и треугольник Паскаля обладает этим свойством!

Как программно построить треугольник Паскаля?

Конечно же, моделью треугольника Паскаля в памяти ЭВМ может служить структура данных «двумерный массив» или нижнетреугольная матрица.

Заполнение двумерного массива будем выполнять построчно. На первом этапе будет удобно заполнить первый столбец и главную диагональ единицами, а все другие элементы — нулями (строки 11–14 листинга программы, рис. 13).

Далее, для заполнения нижнего треугольника матрицы, согласно правилу треугольника Паскаля будем использовать формулу, которая в текущий элемент массива записывает сумму двух элементов предыдущей строки: `triangle[i][j]=triangle[i-1][j-1]+triangle[i-1][j];` (строки 15–17 листинга программы, рис. 13).

Вывод на экран осуществим только для нижнего треугольника матрицы (строки 18–22 листинга программы, рис. 13).

```
1   #include <iostream>
2   #include <stdint.h>
3
4   using namespace std;
5
6   int main()
7   {
8       int triangle[50][50];
9       int n;
10      cin>>n;
11      for (int i=0; i<n; i++)
12          for (int j=0; j<n; j++)
13              if (j==0 || j==i)triangle[i][j]=1;
14              else triangle[i][j]=0;
15      for (int i=2; i<n; i++)
16          for (int j=1; j<i; j++)
17              triangle[i][j]=triangle[i-1][j-1]+triangle[i-1][j];
18      for (int i=0; i<n; i++)
19      {
20          for (int j=0; j<=i; j++) cout<<triangle[i][j]<<"\t";
21          cout<<endl;
22      }
23      return 0;
24  }
```

Рисунок 13. Листинг программы на языке C/C++, позволяющей получить треугольник Паскаля

```
program Pascal_triangle;

var
  triangle: array[0..50, 0..50] of integer;
  n, i, j: integer;

begin
  readln(n);
  for i := 0 to n - 1 do
    for j := 0 to n - 1 do
      if (j = 0) or (j = i) then triangle[i, j] := 1
      else triangle[i, j] := 0;
  for i := 2 to n - 1 do
    for j := 1 to i - 1 do
      triangle[i, j] := triangle[i - 1, j - 1] + triangle[i - 1, j];
  for i := 0 to n - 1 do
  begin
    for j := 0 to i do write(triangle[i, j], Chr(9));
    writeln;
  end;
end.
```

Рисунок 14. Листинг программы на языке Pascal ABC, позволяющей получить треугольник Паскаля

Вопросы.

1. Кому ещё до публикации трактата Паскаля был известен этот треугольник?
2. Как в комбинаторике определяется сочетание из *n*-чисел по *k*? Как вывести формулу для числа сочетаний?
3. Какие вы знаете алгоритмы для построения чисел Фибоначчи?
4. Если вы знакомы с графикой в Паскале, напишите программу построения треугольника Серпинского. На рисунке 15 приведён скриншот результата работы такой программы с глубиной рекурсии, равной 5.

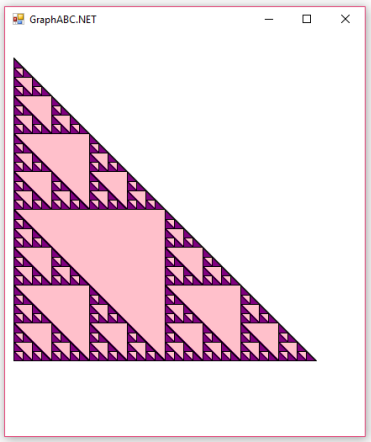


Рисунок 15. Скриншот результата работы программы рисования фрактала «треугольник Серпинского» с глубиной рекурсии, равной 5

5. Назовите ещё два свойства треугольника Паскаля.

ФИЗИКА

НАУЧНОЕ ФИЗИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО УЧАЩИХСЯ

Горбанева Л.В.,
старший преподаватель
кафедры физики ФГБОУ ВО ПИ ТОГУ

На кафедре физики педагогического института ФГБОУ ВО «Тихоокеанский государственный университет» организовано ***научное физическое общество учащихся*** — добровольное общественное объединение учащихся, созданное для развития интеллектуальных способностей.

Научное физическое общество (далее – НФОУ) образуется из учащихся 9–11 классов, проявляющих повышенный интерес к углублённому изучению физики, научно-исследовательской работе в области естествознания. Деятельность НФОУ осуществляется на основе закона «Об образовании в РФ».

Занятия с учащимися проводят преподаватели кафедры физики в стенах педагогического института университета.

Как один из видов дополнительного образования, научное физическое общество учащихся способствует раннему раскрытию у них интересов, способностей и склонностей к научно-поисковой деятельности, а также личностному, социальному и профессиональному самоопределению.

Деятельность НФОУ связана не просто с удовлетворением потребностей учащихся в дополнительном образовании, но и с возможностью выстроить индивидуальную траекторию для каждого ребёнка в соответствии с его талантами и желаниями.

В процессе занятий у школьников происходит развитие научного образа мышления, творческого подхода к собственной деятельности, интеллектуальной инициативы, воспитание установки на престижность занятий фундаментальными науками.

Научное физическое общество состоит из секций:

– основы наноструктур и нанотехнологий;

– решение экспериментальных и олимпиадных физических задач;

– физические явления вокруг нас.

Сотрудничество педагогов и учащихся предполагает следующие формы:

– индивидуальную и групповую работу учащихся под руководством педагогов кафедры физики;

– конференции;

– олимпиады.

Групповая работа учащихся проводится на заседаниях секций с периодичностью один раз в месяц. Индивидуальная работа проводится по утверждённому графику.

Конференции членов НФОУ проводятся ежегодно. На них подводятся итоги, заслушиваются творческие отчёты о работе, утверждаются планы дальнейшей деятельности.

Более всего востребованной является ***секция по изучению основ наноструктур и нанотехнологий***. Это и понятно, так как бурно развивающееся направление – нанотехнология – это принципиально новая технология, на основе которой можно решать проблемы в различных областях науки и производства.

Основная цель занятий в этой секции — познакомить учащихся с основами наноструктур и нанотехнологий, их ролью в реализации потребностей человечества. На занятиях учащиеся знакомятся с понятиями «нанотехнология», «наноструктура», фундаментальными принципами, лежащими в основе их применения, основными достижениями, уникальными свойствами наноматериалов, их применением, а также рассматривают перспективы развития этой отрасли науки и возможные сферы применения нанотехнологий в физике и биологии.

Эти знания будут способствовать профессиональной ориентации выпускников школ.

Изложить на доступном для учеников уровне научные принципы нанотехнологий весьма сложно. Для более успешного освоения этих не простых знаний проводятся не только уроки-лекции, но и лабораторные занятия, на которых у учащихся есть возможность работать на современных сканирующих зондовых микроскопах. С их помощью ребята проводят исследования материалов и предметов, полученных с использованием нанотехнологий (лазерные диски, ткани и другие пособия).

Главным результатом обучения в научном физическом обществе является не только сумма полученных знаний, а развитие физического мышления учащихся, формирование интереса к проблемам, стоящим перед физикой, представлений о незавершенности познания в области естествознания, возможности его дальнейшего развития, профессиональная ориентация.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ КРАЕВЫХ ОЛИМПИАД ПО АСТРОНОМИИ

Гаврилов А.В.,
методист КГАОУ «Краевой центр образования»

Астрономия сравнительно недавно включена в перечень дисциплин, по которым в Хабаровском крае проводятся олимпиады. Безусловно, для решения предлагаемых задач, необходима серьёзная специальная подготовка. Вместе с тем, некоторые олимпиадные задачи можно решать, ограничившись лишь знанием основных определений и законов астрономии, физики и геометрии. В данном материале приводится подборка заданий краевых олимпиад по астрономии подобного типа.

Задача (9 класс).

Определите продолжительность гражданских сумерек в день равноденствия для наблюдателя на экваторе Земли. Видимыми размерами Солнца и атмосферными эффектами пренебречь.

Решение.

В день равноденствия Солнце движется по большому кругу небесной сферы, проходящему через зенит. Восходит и заходит Солнце вертикально. Гражданские сумерки продолжаются, пока центр Солнца находится в пределах высот от - 6^0 до 0^0. Скорость движения Солнца, связанная с суточным вращением Земли, составляет 360^0 в сутки или 15^0 в час. Угловое расстояние в 6^0 оно преодолеет за 24 минуты — это и есть продолжительность гражданских сумерек на экваторе в день равноденствия.

Задача (9 класс).

Луна постепенно удаляется от Земли, и через несколько миллиардов лет период смены её фаз увеличится до 54 современных суток. Какой будет средний угловой диаметр Луны при её наблюдениях с Земли у горизонта?

Решение.

Обозначим синодический период Луны в далёком будущем через S и вычислим её сидерический период T:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{S} + \frac{1}{T_E} \ ,$$

где T_E – период обращения Земли вокруг Солнца. Период обращения Луны вокруг Земли составит 47 суток. Сравнивая его с современным периодом обращения Луны T_0 , получаем величину радиуса орбиты Луны в далёком будущем:

$$R = R_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{2/3} = 1.44 R_0$$ или 552 тысячи километров.

Угловой диаметр Луны при наблюдении у горизонта составит $\delta = d/R = \delta_0/1.44$ или $21{,}5'$. В формуле d – диаметр Луны, а δ_0 – её современный видимый диаметр у горизонта (примерно $31'$).

Задача (9 класс).

Представьте себе, что радиус звёздного диска нашей Галактики изображён размером с радиус Земли. Какого размера станут звёзды в этом масштабе?

Решение.

Радиус звёздного диска Галактики составляет 15 кпк, радиус Земли – 6400 км. Вспомним, что 1 парсек включает в себя примерно 200 000 а. е. или $3*10^{13}$ км. Самые большие звёзды имеют радиус около 1000 радиусов Солнца, а самые

маленькие звёзды – белые карлики имеют размер с Землю, то есть около 0,01 радиуса Солнца. При указанных в условии данных радиус Солнца будет:

$$\frac{6.4\cdot10^{3}}{1.5\cdot10^{4}\cdot3\cdot10^{13}}7\cdot10^{5}=10 \text{ мкм}.$$

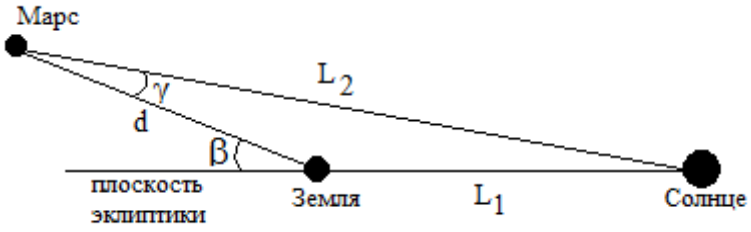
Тогда самые большие звёзды будут иметь радиус 10 мм, а самые маленькие – всего 0,1 мкм.

Задача (10 класс).

4 марта 2012 года наступит противостояние Марса, при котором он будет располагаться на небе в $4{,}6^0$ севернее эклиптики и иметь угловой диаметр 13,9”. Каким будет угловое расстояние между Солнцем и Землёй при наблюдении с Марса в этот день?

Решение.

Марс находится в противостоянии с Солнцем, следовательно, он проходит через плоскость, перпендикулярную эклиптики и содержащую Солнце и Землю. Изобразим все три тела в данной плоскости:



Зная угловой диаметр Марса δ, можно найти расстояние между Землёй и Марсом:

$$d = D/\delta ,$$

здесь D – диаметр Марса. Расстояние получается равным 0,67 а.е. Обозначим угловое расстояние между Марсом и линей эклиптики на небе Земли, как β. Расстояние между Солнцем и Марсом L_2 вычисляется по теореме косинусов, но с учётом малости угла β и близостью его к 1. Получаем:

$$L_2 = L_1 + d = 1.67 \text{ а.е.},$$

здесь L_1 – радиус орбиты Земли, которую можно считать круговой. Угловое расстояние между Солнцем и Землёй на небе Марса вычисляется по теореме синусов:

$$\sin\gamma = \frac{L_1}{L_2}\sin\beta$$ угол γ составляет $2{,}8^0$.

Задача (10 класс).

В безлунные ночи в хорошую погоду на небе можно наблюдать зодиакальный свет, образованный межпланетной пылью, расположенной в плоскости Солнечной системы и подсвечиваемой Солнцем. В какой сезон зодиакальный свет лучше всего наблюдать по вечерам в средней полосе России?

Решение.

Так как межпланетная пыль концентрируется в плоскости Солнечной системы, а Земля тоже находится в этой же плоскости, то зодиакальный свет будет виден на небе вблизи линии – проекции этой плоскости на небесную сферу. Эта линия практически совпадает с эклиптикой и проходит через зодиакальные созвездия.

Зодиакальный свет наблюдать тем легче, чем выше над горизонтом располагается эклиптика. В средних широтах самое высокое положение эклиптики достигается во время верхней кульминации точки летнего солнцестояния, расположенной на границе созвездий Тельца и Близнецов. Кульминация этой точки приходится на конец зимы – начало весны. Этот сезон и является лучшим для наблюдения зодиакального света.

Задача (10 класс).

Два космических аппарата улетают от Земли в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями относительно Земли. На одном из них установлен источник излучения, а на втором — приёмник, который фиксирует, что излучение до него доходит на другой длине волны. Изменение длины волны $\Delta\lambda$ составляет 0,1 от самой длины волны λ. Найдите скорости аппаратов относительно Земли.

Решение.

Изменение длины волны достаточно большое, но всё же заметно меньше самой длины световой волны. Поэтому можно использовать классические формулы для эффекта Доплера, считая скорость существенно меньше скорости света. Скорость удаления аппарата с приёмником от аппарата с источником равна:

$$u = c\,\Delta\lambda/\lambda \ .$$

Так как скорости аппаратов относительно Земли равны и направлены в противоположные стороны, их величина составляет:

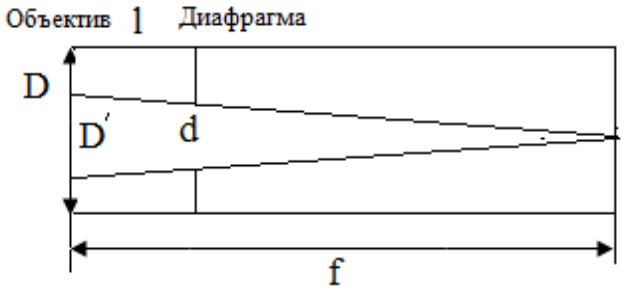
$$v = u/2 = 15\ 000 \text{ км/с}.$$

Задача (10 класс).

В трубу телескопа-рефрактора с диаметром объектива 10 см и фокусным расстоянием 1 м на расстоянии 10 см от объектива вставлена диафрагма, в центре которой есть круглое отверстие диаметром 7 см. Каково отличие предельной звёздной величины в центре поля зрения такого телескопа от аналогичной величины без диафрагмы при визуальных наблюдениях? Для чего такая диафрагма может быть необходима?

Решение.

Диафрагма будет вырезать лучи света, преломленные краями линзы, уменьшая, тем самым, рабочий диаметр объектива:



Определим эффективный диаметр объектива. Пусть D – диаметр объектива, D’ – его эффективный диаметр, d – диаметр отверстия в диафрагме, f – фокусное расстояние, а l – расстояние от объектива до диафрагмы. Тогда из подобия треугольников:

$$\frac{d}{f-l}=\frac{D^{!}}{f},$$

откуда $$D^{!}=\frac{df}{f-l}=7.8см.$$

Предельная звёздная величина для визуальных наблюдений:

$$m=m_0-5\lg D_0+5\lg D,$$

где m_0 и D_0 – предельная звёздная величина для невооружённого глаза и диаметр зрачка. Для диаметра объектива $D^{!}$ получаем:

$$m-m^{!}=5\lg D-5\lg D^{!}=5\lg\frac{D}{D^{!}}=0{,}54.$$

Диафрагма обычно вставляется для того, чтобы ослабить абберации объектива.

Задача (11 класс).

Луну, находящуюся невысоко над горизонтом, наблюдают при помощи камеры-обскуры — тёмной комнаты длиной 4 метра. В стене данной камеры проделано отверстие диаметром L, которое служит объективом камеры. Оцените, во сколько раз отличается освещённость изображения Луны в камере-обскуре от освещённой Луной внешней стены дома.

Решение.

Пренебрежём искажением изображения Луны при проецировании его на стену дома. Тогда изображение Луны на стене дома будет иметь диаметр:

$$d=Ftg\alpha,$$

где α – угол, под которым Луна видна на небе (примерно $0{,}5^0$), а F – длина камеры. При этих условиях диаметр изображения Луны равен 35 мм. Весь свет, прошедший через входное отверстие камеры участвует в формировании изображения. Если обозначить освещённость от Луны внешней стены дома через J_0 , то освещённость изображения:

$$J=J_0\frac{\pi L^2/4}{\pi d^2/4}=J_0\frac{L^2}{d^2}=J_0 0.08.$$

Освещённость от Луны в пятне будет примерно в 12,5 раз меньше освещённости на внешней стороне дома.

Задача (11 класс).

Красная звезда по диаметру в 2 раза больше своей голубой соседки по двойной системе. Какая из звёзд излучает больше энергии? Оцените во сколько раз. Ответ поясните.

Решение.

Значение температуры поверхности звезды красного цвета лежит в пределах от 3000 до 4000 К, а звезды голубого цвета — от 20000 до 30000 К. По закону Стефана-Больцмана светимость звезды составляет:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4,$$

где R и T – её радиус и температура. Для отношения светимостей звёзд получаем:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1^2 T_1^4}{R_2^2 T_2^4} = \frac{1}{4}\frac{T_1^4}{T_2^4},$$

индекс 1 относится к голубой звезде, индекс 2 — к красной.

В зависимости от принятых температур отношение светимостей составляет от 150 до 2500.

Задача (11 класс).

Сколько звёздных суток проходит между двумя последовательными геоцентрическими соединениями Луны с некоторой звездой вблизи эклиптики?

Решение.

По определению, звёздный (сидерический) период обращения Луны T_2 — это промежуток времени между двумя последовательными геоцентрическими соединениями Луны с какой-либо звездой. Этот период равен 27,3217 солнечных суток. Звёздные сутки T_1 – период осевого вращения Земли относительно далёких звёзд или, то же самое, промежуток времени между двумя последовательными верхними кульминациями одной и той же звезды в некотором пункте на поверхности Земли. Из-за орбитального движения Земли данный промежуток несколько меньше солнечных суток – один год содержит на одни звёздные сутки больше, чем солнечные. Продолжительность звёздных суток составляет 23 часа 56 минут 04 секунды или 0,99727 обычных (солнечных) суток. Число звёздных суток в звёздном месяце равно:

$$N = \frac{T_2}{T_1} = 27.396.$$

Задача (11 класс).

Самолёт МиГ-29М может развивать скорость до 2500 км/ч. Во сколько раз это больше (или меньше) скорости движения поверхности на экваторе радиопульсара? Орбитальной скорости аппарата Dawn, вращающегося на низкой круговой орбите вокруг астероида Веста (масса 2,75 *10^{20} кг, радиус 265 км)?

Решение.

Радиопульсар — это нейтронная звезда. Его радиус r_p составляет примерно 10 км. Периоды радиоульсаров T_P бывают от 0,001 до 10 секунд. Скорость на поверхности радиопульсара составит:

$$v_p = \frac{2\pi r_p}{T_p} \ .$$

Минимальное значение (при периоде 10 с) будет примерно 6 км/с или 22 000 км/ч. Это почти в 10 раз больше скорости самолёта. Максимальная скорость на экваторе радиопульсара будет превышать скорость самолёта в 100 000 раз.

Круговая скорость на низкой орбите над Вестой, имеющей массу m_v и радиус R_v равна:

$$v_v = \sqrt{\frac{Gm_v}{r_v}} \ .$$

Численное значение составляет 260 м/с или 1000 км/ч. Скорость самолёта в 2,5 раза больше.

МАТЕМАТИКА

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Карпова И.В.,
доцент кафедры математики и информационных технологий
ФГБОУ ВО ПИ ТОГУ

1. Классическое определение вероятности

Теорию вероятностей называют ещё «математикой случайного», потому что этот раздел математики изучает закономерности, которые имеют место в массе случайных явлений.

Как любой другой раздел математики, теория вероятностей имеет свой понятийный аппарат, который используется при формулировке определений, доказательстве теорем и выводе формул. Рассмотрим понятия, которые будем использовать в дальнейшем.

Испытание *— осуществление комплекса условий.*

Исход испытания (элементарное событие) *— любой результат, который может произойти при проведении испытания.*

Примеры.

1) *Испытание:* подбрасывается игральный кубик.
Исходы испытания:
ω_1 – на верхней грани кубика появилось одно очко;
ω_2 – на верхней грани кубика появилось два очка;
ω_3 – на верхней грани кубика появилось три очка;
ω_4 – на верхней грани кубика появилось четыре очка;
ω_5 – на верхней грани кубика появилось пять очков;
ω_6 – на верхней грани кубика появилось шесть очков.
Всего возможно 6 исходов испытания (или 6 элементарных событий).

2) *Испытание:* ученик сдаёт экзамен.
Исходы испытания:
ω_1 – ученик получил двойку;
ω_2 – ученик получил тройку;
ω_3 – ученик получил четвёрку;
ω_4 – ученик получил пятёрку.
Всего возможно 4 исхода испытания (или 4 элементарных события).

Замечание. Обозначение ω является стандартным обозначением для элементарного события. В дальнейшем мы будем пользоваться этим обозначением.

Если исходы испытания имеют одинаковые шансы на появление, будем называть исходы данного испытания ***равновозможными***.

Пространство элементарных событий *— множество всех элементарных событий (исходов испытания), которые могут появиться при проведении испытания (далее-ПЭС).*

В примерах, которые мы рассмотрели выше, фактически были описаны пространства элементарных событий данных испытаний.

Замечание. Число точек в пространстве элементарных событий (ПЭС), т.е. число элементарных событий в дальнейшем будем обозначать буквой *n*.

Рассмотрим основное понятие, которым мы будем пользоваться в дальнейшем.

Определение 1.1. ***Событием*** *называется совокупность некоторого числа точек ПЭС.*

Замечание. События в дальнейшем мы будем обозначать большими латинскими буквами: *A, B, C*.

Определение 1.2. Событие, которое может произойти, а может и не произойти при проведении испытания, называется ***случайным событием***.

Купив лотерейный билет, мы можем выиграть, а можем и не выиграть; на очередных выборах правящая партия может победить, а может и не победить; на уроке Вас могут вызвать к доске, а могут и не вызвать и т.п. — всё это примеры случайных событий, которые при одних и тех же условиях могут произойти, а могут и не произойти при проведении испытания.

Замечание. Любое элементарное событие также является случайным событием.

Определение 1.3. Событие, которое происходит при любом исходе испытания, называется ***достоверным событием***.

Определение 1.4. Событие, которое не может произойти ни при каком исходе испытания, называется ***невозможным событием***.

Пример.

Испытание: подбрасывается игральный кубик.

Событие A: на верхней грани кубика выпало чётное число очков.

Событие B: на верхней грани кубика выпало число очков, кратное 3.

Событие C: на верхней грани кубика выпало 7 очков.

Событие D: на верхней грани кубика выпало число очков меньшее 7.

События *A* и *B* могут произойти, а могут и не произойти при проведении испытания, поэтому это случайные события.

Событие *C* не может произойти никогда, поэтому оно является невозможным событием.

Событие *D* происходит при любом исходе испытания, значит это достоверное событие.

Мы говорили, что случайные события при одних и тех же условиях могут произойти, а могут и не произойти. При этом у одних случайных событий шансов произойти больше (значит, они более вероятные – ближе к достоверным), а у других меньше (они менее вероятные – ближе к невозможным). Поэтому в первом приближении можно определить вероятность, как степень возможности наступления того или иного события.

В теории вероятностей в зависимости от того, каким условиям удовлетворяют испытания, существует несколько определений вероятности. Мы рассмотрим только одно из них и покажем, как вычислять вероятности некоторых событий.

Пусть проводится одно испытание, удовлетворяющее следующим условиям:

1) число исходов испытания конечно (равно n);

2) исходы испытания являются несовместными;

3) исходы испытания являются равновозможными.

Перечисленные условия составляют так называемую классическую схему испытаний (КСИ).

Определение 1.5. ***Вероятностью события*** *в классической схеме испытаний называется число, равное отношению числа исходов испытания, благоприятствующих для данного события, к числу всех исходов испытания*.

Обычно вероятность события A обозначают $P(A)$. Таким образом

$$P(A) = \frac{m}{n} \ldots \qquad (1),$$

где m – число исходов испытания, благоприятствующих для события A;

n – число всех исходов данного испытания.

Решение задач на вычисление вероятности в классической схеме испытаний обычно осуществляется по следующему алгоритму.

Алгоритм вычисления вероятности в КСИ.

1) Формулируется испытание.

2) Определяется ПЭС данного испытания и число n – число точек в нём.

3) Проверяется, удовлетворяет ли испытание (КСИ).

4) Формулируется событие A, вероятность которого нужно найти.

5) Определяется число m – число элементарных событий, благоприятствующих событию A.

6) Вычисляется вероятность события A по формуле (1).

Пример решения задач.

Задача. Одновременно подбрасывают три монеты.

А) Найти вероятность того, что все монеты упадут на одну сторону.

Б) Найти вероятность того, что выпадет хотя бы один «герб».

Решение А).

1. *Испытание.* Подбрасывается 3 монеты одновременно.

2. *ПЭС*: выпишем все возможные исходы испытания, обозначив буквой Г появление «герба», а буквой Ц – появление «цифры»:

{ГГГ; ГГЦ; ГЦГ; ЦГГ; ЦЦГ; ЦГЦ; ГЦЦ; ЦЦЦ}, n = 8.

3. *Проверим условия КСИ*:

1) число исходов испытания $n = 8$ конечно;

2) так как при однократном подбрасывании трёх монет может появиться только один из перечисленных исходов, то исходы испытания несовместны;

3) так как шансы на выпадение «герба» или цифры» на каждой из монет одинаковые, то исходы испытания равновозможные.

4. *Событие А*: все три монеты упали на одну сторону.

5. Среди перечисленных исходов испытания только два – ГГГ и ЦЦЦ – благоприятствуют *Событию А*, поэтому $m = 2$.

6. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{8} = 0{,}25.$

Решение Б).

1. *Испытание.* Подбрасывается 3 монеты одновременно.

2. *ПЭС*: выпишем все возможные исходы испытания, обозначив буквой Г появление «герба», а буквой Ц – появление «цифры»:

{ГГГ; ГГЦ; ГЦГ; ЦГГ; ЦЦГ; ЦГЦ; ГЦЦ; ЦЦЦ}, $n = 8$.

3. *Проверим условия КСИ*:

1) число исходов испытания $n = 8$ конечно;

2) так как при однократном подбрасывании трёх монет может появиться только один из перечисленных исходов, то исходы испытания несовместны;

3) так как шансы на выпадение «герба» или «цифры» на каждой из монет одинаковые, то исходы испытания равновозможные.

4. *Событие А*: при однократном подбрасывании трёх монет появился хотя бы один «герб».

5. Среди перечисленных исходов благоприятствуют следующие: ГГГ; ГГЦ; ГЦГ; ЦГГ; ЦЦГ; ЦГЦ; ГЦЦ, поэтому $m = 7$.

6. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{7}{8}$.

Ответ: А) $P(A) = 0{,}25$; Б) $P(A) = \frac{7}{8}$.

Замечание. Эта задача имеет и другое решение. Если иметь ввиду, что проводится не одно испытание, а три, то эти испытания удовлетворяют так называемой схеме Бернулли, решение задач в которой осуществляется по другому алгоритму.

Замечание. Может показаться, что совсем не нужно каждый раз останавливаться на проверке условий КСИ, так как они всё равно выполняются. Но это очень важный момент при решении вероятностной задачи. Здесь мы рассматривали только задачи, в которых испытание удовлетворяет КСИ, но на практике огромное число испытаний не удовлетворяет КСИ, поэтому находить вероятности событий в таких задачах нужно по другим формулам. Проверка условий КСИ поможет избежать ошибок при выборе алгоритма.

2. Элементы математической статистики

Математическая статистика — раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей.

Обычно полученные наблюдаемые данные представляют собой множество расположенных в беспорядке чисел, зачастую бывает трудно выявить какую-либо закономерность их изменения (варьирования). Для изучения закономерностей (если таковые имеются) варьирования значений случайной величины опытные данные подвергают обработке.

Пример 1.

На телефонной станции проводились наблюдения над числом X – неправильных соединений в минуту. Наблюдения в течение часа дали следующие результаты: 3; 1; 3; 1; 4; 2; 2; 4; 0; 3; 0; 2; 2; 0; 2; 1; 4; 3; 3; 1; 4; 2; 2; 1; 1; 2; 1; 0; 3; 4; 1; 3; 2; 7; 2; 0; 0; 1; 3; 3; 1; 2; 4; 2; 0; 2; 3; 1; 2; 5; 1; 1; 0; 1; 1; 2; 2; 1; 1; 5. Здесь очевидно, что X является дискретной случайной величиной, а полученные о ней сведения представляют собой статистические данные.

Операция, заключающаяся в том, что результаты наблюдений над случайной величиной, то есть наблюдаемые значения случайной величины, располагают в порядке неубывания, называется ***ранжированием опытных данных*.**

После проведения операции *ранжирования*, данные нетрудно объединить в группы, т.е. *сгруппировать* так, что в каждой отдельной группе значения случайной величины будут одинаковые. Ранжируем и сгруппируем данные из примера 1:

0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 7.

Из полученного ряда чисел видно, что все 60 значений СВ разбиты на семь групп. Таким образом, имеется семь *различных* значений СВX: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 7.

Опишем рассмотренный пример в терминах математической статистики.

Определение 2.1. Совокупность всех подлежащих изучению объектов или результатов всех мыслимых наблюдений, производимых в неизменных условиях над одним объектом, называется ***генеральной совокупностью*.**

Определение 2.2. ***Выборочной совокупностью (выборкой)*** *называется совокупность объектов, отобранных случайным образом из генеральной совокупности.*

Число объектов в генеральной (выборочной) совокупности называется ***её объёмом*** *и обозначается N (n для выборки).*

В примере 1, где наблюдалось число неправильных соединений в минуту на телефонной станции, генеральной совокупностью будет число неправильных соединений в минуту за всё время работы станции. Наблюдения, которые представлены в примере 1, являются выборочной совокупностью, объем которой $n = 60$.

Определение 2.3. Ранжированная выборка называется ***выриационным рядом****. Различные элементы вариационного ряда называются* ***вариантами****.*

Таким образом, в примере 1 СВ X имеет семь различных вариант: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 7.

Число n_i, показывающее, сколько раз одна и та же варианта x_i встречается в вариационном ряду, называется ***частотой*** этой варианты. Очевидно, что $n = n_1 + ... + n_k$, где k – число различных вариант в заданном вариационном ряду.

В рассмотренном примере варианты имеют следующие частоты: 8; 17; 16; 10; 6; 2; 1 соответственно, и 60 = 8 + 17 + 16 + 10 + 6 + 2 + 1.

Определение 2.4. Отношение частоты данной варианты к объёму всей выборки называется ***относительной частотой варианты****.*

Относительная частота варианты x_i обычно обозначается $w_i = \frac{n_i}{n}$

В нашем примере варианты имеют следующие относительные частоты: 0,13; 0,28; 0, 27; 0,17; 0,1; 0,03; 0,02. Заметим, что сумма всех относительных частот равна 1.

Определение 2.5. Перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот называется ***статистическим распределением выборки*** *или* ***статистическим рядом****.*

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k
w_i	w_1	w_2	...	w_k

СВ X из примера 1 имеет следующее статистическое распределение частот и относительных частот:

x_i	0	1	2	3	4	5	7
n_i	8	17	16	10	6	2	1
w_i	0,13	0,28	0,27	0,17	0,1	0,03	0,02

Для решения многих задач удобно изображать статистическое распределение графически.

Полигоном частот *(относительных частот) называют ломаную, отрезки которой соединяют точки с координатами* $(x_1, n_1); (x_2, n_2); ...; (x_k, n_k)$ *(для относительных частот:* $(x_1, w_1); (x_2, w_2); ...; (x_k, w_k)$*).*

Полигон относительных частот СВ X из примера 1 изображён на рисунке:

В том случае, когда одинаковые наблюдаемые значения встречаются редко, а число значений велико, или в случае, когда наблюдаемые значения имеют непрерывное распределение, строят ***гистограмму*** статистического распределения.

Для построения гистограммы весь промежуток значений разбивают на несколько интервалов и подсчитывают, сколько значений входит в каждый из интервалов. Затем для каждого интервала вычисляется относительная частота попадания вариант в этот интервал. В прямоугольной системе координат строят ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат найденные интервалы, а высота каждого равна относительной частоте этого интервала поделённой на его длину. То есть, если длина каждого частичного интервала равна h, относительная частота i-го интервала равна $\frac{n_i}{n}$, то высота соответствующего прямоугольника равна $\frac{n_i}{n \cdot h}$. Очевидно, что площадь такой ступенчатой фигуры будет равна 1.

Для изучения закономерностей, которым подчиняется статистическое распределение, обычно вычисляют его числовые характеристики.

Пусть статистическое распределение выборки объема n имеет вид:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

Определение 2.6. ***Выборочным средним*** $\bar{x}_в$ *называется среднее арифметическое всех значений выборки:* $\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$

Определение 2.7. ***Выборочной дисперсией*** $\boldsymbol{D_в}$ *называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочной средней* $\bar{x}_в$, т. е. $D_в = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x}_в)^2 n_i$

Определение 2.8. ***Модой*** $\boldsymbol{M_0^*}$ *вариационного ряда называется варианта, имеющая наибольшую частоту.*

Определение 2.9. ***Медианой*** M_e^* *вариационного ряда называется варианта, приходящаяся на середину ряда*.

Если $n = 2k$ (то есть ряд имеет чётное число членов),
то медиана $M_e^* = (x_k + x_{k+1})/2$;
если $n = 2k+1$, то $M_e^* = x_{k+1}$.

Пример. Найдём числовые характеристики статистического распределения:

x_i	0	1	2	3	4	5	7
n_i	8	17	16	10	6	2	1

1) $\bar{x}_в = \frac{1}{60}(0\cdot 8+1\cdot 17+2\cdot 16+3\cdot 10+4\cdot 6+5\cdot 2+7\cdot 1) = 2;$

2) $D_в = \frac{1}{60}((0-2)^2\cdot 8+(1-2)^2\cdot 17+(2-2)^2\cdot 16+(3-2)^2\cdot 10+(4-2)^2\cdot 6+(5-2)^2\cdot 2+(7-2)^2\cdot 1$

$D_в = 1{,}57$; $M_0^* = 17$; 4) $M_e^* = 3$ (так как ряд содержит нечётное число членов).

3. Задачи для самостоятельного решения

М.9.1. Все буквы русского алфавита написаны на 33 одинаковых карточках. Какова вероятность того, что на наудачу в извлечённой карточке написанная буква окажется гласной?

М.9.2. Одновременно подбрасывается 2 игральных кубика.

А) Какова вероятность того, что на кубиках выпадет равное количество очков?

Б) Какова вероятность того, что число, выпавшее на первом кубике, больше числа, выпавшего на втором кубике?

М.9.3. Бросаются три игральные кости. Какова вероятность того, что:

а) хотя бы одна кость откроется на 6 очках?

б) ровно одна кость откроется на 6 очках?

в) одна кость откроется на 6 очках, а одна – на 3 очках?

М.9.4. В классе учится 10 мальчиков и 20 девочек.

а) На класс дали один билет в цирк, который решено разыграть по жребию. Какова вероятность того, что в цирк пойдёт девочка?

б) Учитель истории знает, что 3 мальчика и 5 девочек из класса были накануне в кино, поэтому не выучили домашнее задание. К сожалению, он не знает их фамилий, но очень хочет поставить кому-нибудь двойку. Кого ему лучше вызвать к доске – мальчика или девочку?

М.9.5. Пустые горшочки с мёдом Винни-Пух ставит на полочку вместе с полными для того, чтобы вид уменьшающегося числа горшков не слишком портил

ему настроение. В настоящий момент в Пуховом буфете вперемежку стоят 5 горшочков с мёдом и 6 абсолютно пустых. Какова вероятность того, что в двух взятых на ужин горшочках окажется мёд?

М 9.6. Ниже приведены результаты тестирования (в баллах) 60 учеников 9-х классов по математике:

51, 72, 35, 69, 81, 55, 91, 52, 36, 72, 69, 55, 42, 95, 69, 78, 66, 81, 95, 72, 49, 51, 69, 36, 78, 81, 51, 55, 72, 95, 69, 75, 88, 81, 72, 78, 66, 81, 69, 51, 80, 56, 75, 69, 81, 42, 66, 78, 72, 69, 35, 88, 81, 78, 76, 75, 72, 59, 66, 100.

Требуется:

1) Ранжировать и сгруппировать представленные статистические данные.

2) Найти частоты и относительные частоты каждой варианты. Построить статистические ряды частот и относительных частот.

3) Построить полигон частот.

4) Найти числовые характеристики статистического распределения $\bar{x}_в$; $D_в$; M_0^*; M_e^*.

М 9.7. Каждая буква алфавита встречается в нашем языке с определённой частотой. Ниже приведена таблица относительных частот букв русского алфавита:

А	0,062	**З**	0,016	**О**	0,090	**Х**	0,009	**Ь**	0,013
Б	0,014	**И**	0,062	**П**	0,023	**Ц**	0,004	**Э**	0,003
В	0,038	**Й**	0,010	**Р**	0,040	**Ч**	0,012	**Ю**	0,006
Г	0,013	**К**	0,028	**С**	0,045	**Ш**	0,006	**Я**	0,018
Д	0,025	**Л**	0,035	**Т**	0,053	**Щ**	0,003		
Е	0,072	**М**	0,026	**У**	0,021	**Ъ**	0,001		
Ж	0,007	**Н**	0,053	**Ф**	0,002	**Ы**	0,016		

Проведите собственное исследование: возьмите любую книгу и пересчитайте, сколько раз та или иная буква русского алфавита встречается на одной из страниц этой книги. Найдите частоты появления каждой буквы, постройте полигон частот. Найдите относительные частоты и сравните их с частотами, данными в таблице. Объясните расхождения с табличными данными, если таковые имеются.

Список литературы

1. Исакова И. Четыре приёма быстрого счета // Газета «Информатика» № 10. – 2006.
2. Крылов А.Г. Бином Ньютона, треугольник Паскаля и... шары//Газета «Информатика» № 19, 20. – 2005.
3. Реньи А. Трилогия о математике. (Диалоги о математике. Письма о вероятности. Дневник. – Записки студента по теории информации.) Пер. с венгер./Под ред. и с предисл. акад. АН УССР проф. Б. В. Гнеденко. – М.: Мир, 1980. – 376 с.
4. Филиппов М.М. Блез Паскаль. Его жизнь, научная и философская деятельность//Библиографический очерк. СПб: Общественная польза, 1891. – 80 с.
5. Жизнь замечательных людей. Биографическая библиотека Ф. Павленкова [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.eduspb.com/public/books/byograf/blez_paskal._ego_zhizn_nauchnaya_i_filosofskaya_deyatelnost.pdf
6. Математика/Ред. коллегия: М. Аксёнова, В. Володин, М. Самсонов//Энциклопедия для детей. – 2-е изд., перераб. – М.: Мир энциклопедий Аванта+: Астрель, 2007. – Т.11. – 621 с.
7. Энциклопедический словарь юного математика/Сост. Савин А.П. – Педагогика, 1989.

Краевое государственное
автономное образовательное учреждение
дополнительного образования
«Центр развития творчества детей (Региональный модельный центр
дополнительного образования детей Хабаровского края»

680000, г. Хабаровск, ул. Комсомольская, 87
тел. / факс: (4212) 30-57-13
Твиттер: twitter.com/yung_khb
Инстаграм: @yung_khb
e-mail: yung_khb@mail.ru
http://www.kcdod.khb.ru

Тираж: 20 экз.