

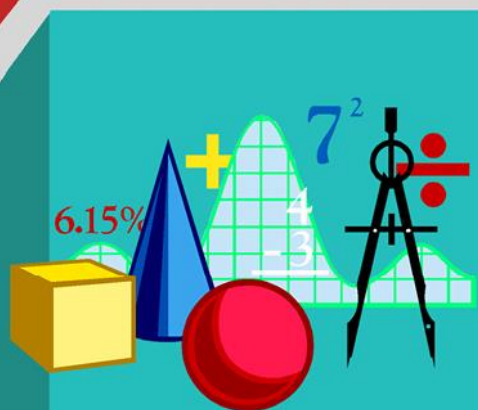
Министерство образования и науки Хабаровского края

Краевое государственное автономное образовательное учреждение дополнительного образования
«Центр развития творчества детей
(Региональный модельный центр дополнительного образования детей Хабаровского края)»

Центр технического творчества

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

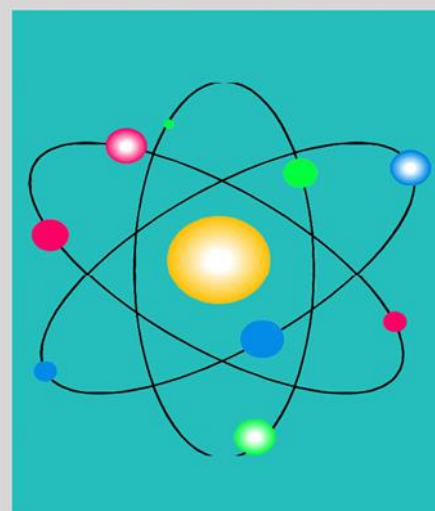
Математика



Информатика



Физика



в школах Хабаровского края

МИФ

№ 4 (8) 2018 г.

Хабаровск
2018

МИФ: математика, информатика, физика в школах Хабаровского края.
Методические рекомендации / Сост. И.В. Воеводина. – Хабаровск: КГАОУ ДО
РМЦ, 2018. – 46 с.

В данных методических рекомендациях представлены материалы по
математике, информатике и физике.

Темы будут полезны учителям общеобразовательных организаций, педагогам
дополнительного образования для работы с детьми с целью повышения интереса к
физико-математическому образованию.

Ответственный редактор: В.В. Шевченко

Ответственный за выпуск: А.Ф. Немцев, директор ЦТТ КГАОУ ДО РМЦ

Компьютерная вёрстка: В.Д. Шабалдина

Научные консультанты:

по математике: В.В. Мендель, директор ФГБОУ ВО ПИ ТОГУ,
г. Хабаровск;

по информатике: С.А. Погорелов, научный сотрудник вычислительного
центра ДВО РАН;

по физике: И.Н. Егоршин, старший преподаватель кафедры «Физика» ФГБОУ
ВО ПИ ТОГУ, г. Хабаровск.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	4
<i>И.В. Воеводина</i>	
Расширение образовательных возможностей Хабаровской краевой заочной физико-математической школы.....	5

ИНФОРМАТИКА

С.А. Погорелов

Алгоритмы

1. Понятие алгоритма. Линейные алгоритмы. Знакомство со средой программирования Паскаль (Pascal)	8
2. Типы данных. Операции над различными типами данных	9
3. Алгоритмы с ветвлением	11
4. Понятие цикла. Циклы с параметром.....	12
5. Циклы с условием. Примеры использования в алгоритмах	13
6. Алгоритм Евклида. НОД. НОК.....	15
7. Вложенные циклы	16
8. Решение различных задач.....	17

МАТЕМАТИКА

В.В. Мендель

Прямая, окружность и координаты

Часть I. Прямая и координаты	18
Часть II. Окружность и координаты.....	25
Часть III. Дополнительный справочный материал по конфигурациям окружностей и других геометрических объектов.....	27
Часть IV. Задачи для самостоятельного решения	32

ФИЗИКА

И.Н. Егоршин

Основы микроэлектроники

1. Полупроводники.....	35
2. Электронно-дырочный переход.....	37
3. Полупроводниковые приборы	38
4. Основы Транзисторно-Транзисторной Логики (ТТЛ).....	41

Библиографический список.....	46
-------------------------------	----

ВВЕДЕНИЕ

В повседневной жизни мы не замечаем, как используем те или иные алгоритмы. Приготовить еду, собраться на работу, перейти дорогу — все эти действия выполняются в определённой последовательности. Человек ежедневно пользуется различными алгоритмами. Например, правила умножения, деления, сложения, вычитания чисел; грамматические правила правописания слов и предложений, а также разнообразные инструкции, рецепты и указания — всё это алгоритмы.

Мы все живём в огромном потоке информации. Информация — постоянный спутник человека. Всегда люди стремились к тому, чтобы облегчить свой труд с помощью каких-нибудь машин и механизмов. И таким механизмом для работы с информацией стал компьютер.

Понятие алгоритма, виды алгоритмов, работа с ними и решение задач рассмотрены в материале С.А. Погорелова, научного сотрудника вычислительного центра ДВО РАН. Изучение данной темы помогает развить у учащихся алгоритмическое мышление, что само по себе является базой для освоения программирования.

Тему «Прямая, окружность и координаты» рассматривает директор ФГБОУ ВО ПИ ТОГУ В.В. Мендель. Придавая геометрическим исследованиям алгебраический характер, метод координат переносит в геометрию наиболее важную особенность алгебры — единообразие способов решения задач. Другое достоинство метода координат состоит в том, что его применение избавляет от необходимости прибегать к наглядному представлению сложных пространственных изображений.

В настоящее время микроэлектроника в школе приобретает всё большую значимость и актуальность. Учащиеся вовлечены в учебный процесс создания схем, проектирования и программирования различных устройств на базе микроконтроллеров и ежегодно участвуют в конкурсах, олимпиадах и конференциях. В данной теме поможет разобраться старший преподаватель кафедры физики ФГБОУ ВО ПИ ТОГУ И.Н. Егоршин в материалах по теме «Основы микроэлектроники».

*И.В. Воеводина,
методист центра технического творчества
КГАОУ ДО РМЦ*

Расширение образовательных возможностей Хабаровской краевой заочной физико-математической школы

Дистанционная модель обучения одарённых детей Хабаровского края представляет собой совокупность педагогического, методического и организационного компонентов, что обеспечивает целостность содержания, форм и методов обучения, средств мониторинга и диагностики в условиях осуществления дополнительного образовательного процесса на расстоянии с использованием современных информационных и телекоммуникационных технологий.

Основная цель деятельности Хабаровской краевой заочной физико-математической школы: создание условий для обеспечения в Хабаровском крае системы взаимодействия в сфере общего и дополнительного образования детей по реализации современных, вариативных и востребованных дополнительных общеобразовательных программ физико-математического направления для детей, независимо от места их проживания

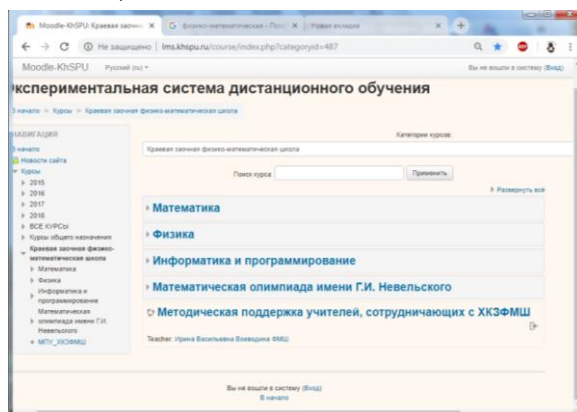
Основные задачи:

1. Создание условий и механизмов для выявления, сопровождения и поддержки учащихся Хабаровского края, интересующихся физикой, математикой, программированием, независимо от места их проживания.
2. Формирование и распространение моделей сетевого взаимодействия при реализации дополнительных образовательных общеразвивающих программ естественнонаучной направленности по физике и математике и технической направленности по информатике и программированию.
3. Обеспечение развития профессионального мастерства и уровня компетенций педагогов сферы дополнительного образования на территории Хабаровского края.
4. Осуществление методической поддержки образовательных организаций, реализующих ДООП естественнонаучной направленности по физике и математике и технической направленности по информатике и программированию.
5. Создание условий для сопровождения одарённых детей в сфере дополнительного образования по физике, математике, информатике и программированию.

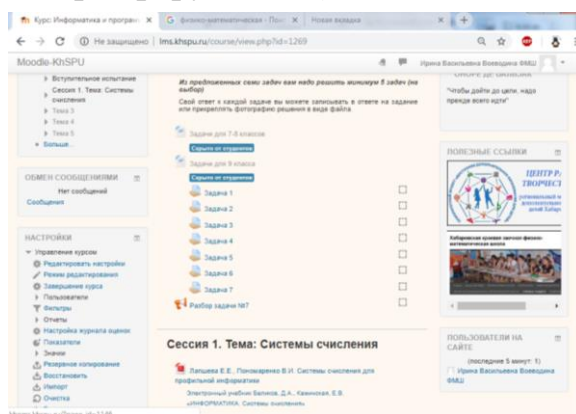
Хабаровская краевая заочная физико-математическая школа (ХКЗФМШ) с 2018–2019 учебного года расширила возможности дистанционного обучения с применением платформы Moodle. Благодаря сотрудничеству с ТОГУ у ХКЗФМШ появился мощный набор ориентированных на учащихся инструментов и совместных учебных сред.

Платформа Moodle работает в сети Интернет и поэтому может быть доступна в любой точке и на любом устройстве в Хабаровском крае. Она имеет простой интерфейс, функции перетаскивания и хорошо документированные ресурсы, учащийся может открыть любой файл простым нажатием на ссылку.

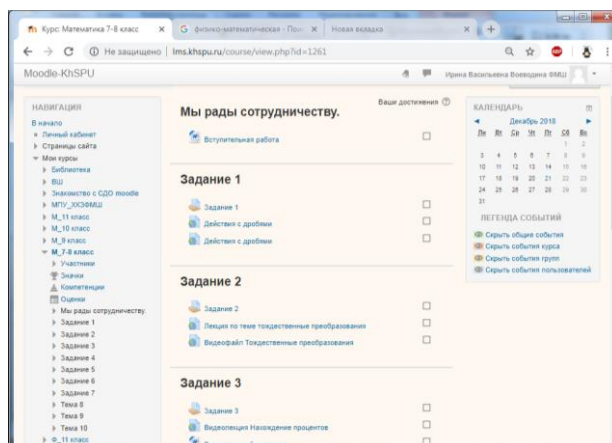
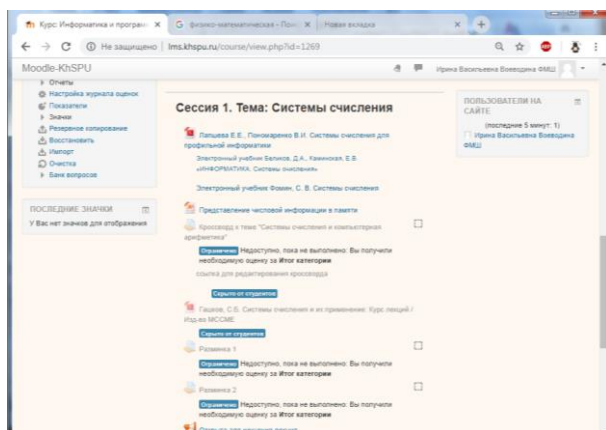
На первой странице экспериментальной системы дистанционного обучения MOODL в центральном блоке представлено содержание курсов ХКЗФМШ (математика, физика, информатика и программирование, математическая Олимпиада имени Г.И. Невельского, методическая поддержка учителей, сотрудничающих с ХКЗФМШ).



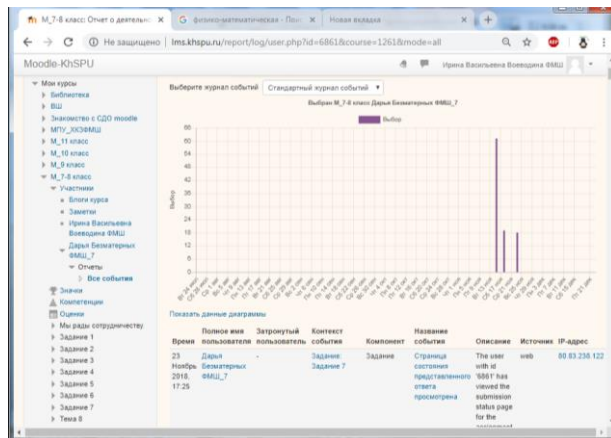
На следующей странице выделены тематические разделы курсов (деление по классам). При вхождении в экспериментальную систему дистанционного обучения учащиеся сразу видят свои курсы, задания, информацию о преподавателе, слева от центрального блока расположены функциональные и информационные блоки (различные ссылки, календарь, форум и т.д.).



В личном кабинете учащихся ХКЗФМШ подобран содержательный материал по изучаемой теме (видео, лекции, кроссворды, презентации и т. д.), предусмотрено окно для комментариев и вопросов преподавателям Школы.



В процессе выполнения заданий ребята могут присылать ответы в любом формате. Преподаватели ХКЗФМШ контролируют учебную деятельность благодаря форме, в которой хранятся личные данные учащегося, его блог, полные отчёты о деятельности, его сообщения на всех форумах, также могут добавлять, удалять и редактировать записи свои и учащихся, давать советы по решению и оформлению работ.



Основным преимуществом обучения с использованием дистанционных технологий является возможность создания индивидуальной образовательной траектории, максимальная индивидуализация учебного процесса. Учащиеся могут сразу увидеть, где исправлены ошибки, где недочёты и над чем ещё надо работать.

Дистанционная модель поддержки школьников является одной из эффективных форм сопровождения деятельности по обучению и развитию одарённых детей. Её внедрение на уровне Хабаровского края позволяет значительно расширить охват учащихся, создать дополнительные и расширить имеющиеся условия для развития их способностей, а также привлечь к этой работе ведущих педагогов.

ИНФОРМАТИКА

С.А. Погорелов,

научный сотрудник вычислительного центра ДВО РАН

Алгоритмы

1. Понятие алгоритма. Линейные алгоритмы. Знакомство со средой программирования Паскаль(Pascal).

Алгоритм — это:

- последовательность команд, предназначенная исполнителю, в результате выполнения которой он должен решить поставленную задачу;
- набор инструкций, описывающих порядок действий исполнителя для достижения некоторого результата.

Пример.

Приведём для примера простой алгоритм действия пешехода, который позволит ему безопасно перейти улицу:

1. Подойти к дороге.
2. Дождаться зелёного сигнала светофора.
3. Перейти дорогу.
4. Если впереди есть ещё одна дорога, то перейти к шагу 1.

Свойства алгоритмов:

- *дискретность* — алгоритм должен представлять процесс решения задачи, как последовательное выполнение некоторых простых шагов. При этом для выполнения каждого шага алгоритма требуется конечный отрезок времени;
- *детерминированность (определённость)* — в каждый момент времени следующий шаг работы однозначно определяется состоянием системы;
- *понятность* — алгоритм должен включать только те команды, которые доступны исполнителю и входят в его систему команд;
- *завершаемость (конечность)* — в более узком понимании алгоритма, как математической функции, при правильно заданных начальных данных алгоритм должен завершать работу и выдавать результат за определённое число шагов;
- *массовость (универсальность)* — алгоритм должен быть применим к разным наборам начальных данных;
- *результативность* — завершение алгоритма определёнными результатами.

Линейный алгоритм — набор команд (указаний), выполняемых строго последовательно во времени, без ветвлений и циклов, в порядке записи команд.

Ввод с клавиатуры:

Readln (a, b) — вводим два значения a и b, разделённые пробелом.

Вывод на экран:

Writeln ('Посчитанное значение равно', rez) — выводим на экран текст «Посчитанное значение равно», после чего — число, хранящееся в переменной rez.

Пример линейной программы:

```
Program Example_1;  
Var a,b,rez: Integer;  
Begin Writeln('Введите два числа через пробел');  
Readln(a,b);  
rez:=a*b;  
Writeln ('Их произведение равно ', rez);  
Writeln ('Нажмите <Enter>');  
Readln;  
End.
```

2. Типы данных. Операции над различными типами данных.

Integer — целочисленный тип данных.

Double — вещественный тип данных.

Операции над данными:

:= — операция присваивания.

+, **-**, *****, **/** — арифметические операции (для типов integer и double). Результат операции / (деление) всегда должен быть присвоен переменной вещественного типа, т.к. результат деления не всегда является целым числом.

Для целочисленного деления используют операции.

A div B — находит целую часть от деления.

A mod B — находит остаток от деления.

SQR(x) — находит квадрат значения x.

✓ **Пример**

$4^2 = \text{sqr}(4) = 16;$

$x = 13, x^2 = \text{sqr}(x) = \text{sqr}(13) = 169;$

если $d=2, e=5$, то

$(d+e)^2 = \text{sqr}(d+e) = \text{sqr}(2+5) = \text{sqr}(7) = 49;$

если $x=3$, то

$x^4 = \text{sqr}(\text{sqr}(x)) = \text{sqr}(\text{sqr}(3)) = \text{sqr}(9) = 81.$

ABS(x) — находит абсолютную величину значения x.

$$ABS(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x \geq 0 \\ -x, & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

✓ **Пример**
 $\text{abs}(12)=12;$
 $\text{abs}(-12)=12;$
 если $x=3, y=-5$, то
 $\text{abs}(x+y)=\text{abs}(3+(-5))=\text{abs}(-2)=2;$
 если $x=3, y=-5$, то
 $\text{abs}(x)+\text{abs}(y)=\text{abs}(3)+\text{abs}(-5)=3+5=8.$

Boolean — логический тип данных. Может принимать значения FALSE (ложь) или TRUE (правда).

Переменные типа Boolean, как правило, получают свои значения в результате выполнения операций сравнения ($<$, $>$, $<=$, $>=$, $<>$, $=$). Результат равен TRUE, если отношение выполнено; в противном случае — FALSE. Например, логическая переменная $c=3<5$ примет значение TRUE, а переменная $d=5<>5$ — значение FALSE.

Существует 4 логические операции: not, and, or, xor. Приведём таблицу результатов применения этих операций.

Таблица 1

Значение операнда		Значение операции			
X	Y	not X	X and Y	X or Y	X or Y
false	false	true	false	false	false
false	true	true	false	true	true
true	false	false	false	true	true
true	true	false	true	true	false

Важно уточнить последовательность выполнения операций в логическом выражении:

1. NOT
2. AND, *, /, DIV, MOD
3. OR, XOR, +, -
4. Операции сравнения.

Думаю, что про приоритет выполнения операций в скобках уточнять не требуется.

Задание 1. Написать программу расчёта следующих выражений:

$$a=14x^4-5x^3+11x-14$$

$$b=7y^5-2y^4+3y$$

$$c=x^3+|x^2-13x+3|-11$$

$$d=|3a^4+12a^3-4a+6|-13a.$$

Задание 2. Вычислить значения выражений:

$$\text{And } (a>5) \text{ and } (b>21) \text{ and } (a<>20)$$

$$\text{not } (a<15) \text{ or not } (b>3)$$

$$c \text{ or } d \text{ and } (a=10), \text{ если } a=11, b=20, c=\text{true}, d=\text{false}.$$

3. Алгоритмы с ветвлением.

Полный условный оператор.

If <условие> Then <оператор 1> Else <оператор 2>.

Если условие истинно, то выполняем оператор 1; в противном случае — оператор 2.

Неполный условный оператор.

If <условие> Then <оператор>.

Если условие истинно, то выполняем оператор, в противном случае не делаем ничего.

Пример алгоритма ветвления можно посмотреть на примере задачи, проверяющей, принадлежит ли число интервалу (0,5):

```
Program Example_3;  
Var x: Integer;  
Begin  
    Writeln('Введите число x');  
    Readln(x);  
    If (x>0) And (x<5) Then Writeln(x, ' принадлежит  
    интервалу(0,5)')  
    Else Writeln(x, ' не принадлежит интервалу');  
End.
```

Вложенные операторы условия.

Часто бывают ситуации, когда надо выбирать не из двух вариантов, а большего количества. В таких случаях можно применять вложенные условные операторы.

Рассмотрим на примере.

Даны целые числа a, b, c.

Если $a \leq b \leq c$, то все числа заменить их квадратами; если $a > b > c$, то каждое число заменить наибольшим из них; в противном случае заменить знак каждого числа.

```
Program Example_4;  
Var a,b,c: Integer;  
Begin  
    Writeln('Введите числа a, b, c');  
    Readln(a,b,c);  
    If (a<=b) And (b<=c) Then Begin a:=sqr(a);  
    b:=sqr(b); c:=sqr(c)  
    End  
    Else If (a>b) And (b>c) Then Begin a:=c; b:=c End  
    Else Begin a:=-a; b:=-b; c:=-c End;  
    Writeln(a:3,b:3,c:3);  
    Readln  
End.
```

Задание 1. Выведите на экран большее из двух чисел.

Задание 2. Запишите условный оператор, который вычисляет rez по формуле $a+b$, если a или b чётное, и $a*b$ — в противном случае.

Задание 3. Написать программу, подсчитывающую сумму только положительных из 3 чисел.

4. Понятие цикла. Циклы с параметром.

Цикл — разновидность управляющей конструкции в высокоуровневых языках программирования, предназначенная для организации многократного исполнения набора инструкций. Также циклом может называться любая многократно исполняемая последовательность инструкций, организованная любым способом (например, с помощью условного перехода).

Цикл с параметром:

For <параметр>:= A to B DO <тело цикла>;

For <параметр>:= A downto B DO <тело цикла> .

Циклы с параметром применяются тогда, когда известно число повторений тела цикла. Начальное и конечное значение параметра цикла можно представить константами, переменными или арифметическими выражениями. Если тело цикла представлено несколькими операторами, тогда необходимо все операторы тела цикла заключить в операторные скобки Begin, End.

Пример 1.

Составить программу вычисления следующего выражения:

$$y=((...(20^2-19^2)^2-18^2)-...-1^2)^2.$$

Обозначим y — очередное значение квадрата числа; n — параметр цикла.

```
Program Example_5;  
Var y, n: Integer;  
Begin  
y:=sqr(20);  
For n:=19 Downto 1 Do y:=sqr(y-sqr(n));  
Writeln('Значение выражения равно');  
Writeln(y);  
End.
```

Пример 2.

Из чисел от 10 до 99 вывести те, сумма цифр которых равна n ($0 < n < 19$).

Введём обозначения:

k — просматриваемое число;

p_1 — первая цифра числа;

p_2 — вторая цифра числа;

s — сумма цифр числа k .

Число k является искомым тогда и только тогда, когда $s=n$.

```

Program Example_6;
Var k,n,p1,p2,s:Integer;
Begin
  Writeln('введите целое число ');
  Readln(n); {вводим целое число}
  For k:=10 To 99 Do {для(For) K от 10 до(To) 99}
    делая(Do)}
    Begin
      p1:=k Div 10; {выделяем первую цифру}
      p2:=k Mod 10; {выделяем вторую цифру}
      s:=p1+p2; {находим сумму цифр}
      If s=n Then Writeln(k); {если сумма равна n, то выводим K}
    End;
  Readln;
End.

```

Задание 1. Составить программу вычисления суммы кубов чисел от 25 до 60.

Задание 2. Найти сумму положительных чисел из промежутка от A до B, кратных 5.

5. Циклы с условием. Примеры использования в алгоритмах.

Циклы с условием отличаются от циклов с параметром тем, что в них заранее неизвестно число повторений тела цикла.

Циклы с условием делятся на 2 типа:

- циклы с предусловием;
- циклы с постусловием.

Цикл с предусловием.

While <условие> **do** <тело цикла>.

Выполнение оператора цикла начинается с проверки условия — если оно истинно, то выполняется тело цикла. Затем вновь идёт проверка условия. Как только на очередном шаге цикла условие становится ложным, то выполнение тела цикла прекращается. В теле цикла обязательно должен быть оператор, влияющий на соблюдение условия цикла, иначе произойдет заикливание.

Пример.

Дано натуральное число n. Подсчитать количество цифр данного числа. Подсчёт цифр начнём с последней цифры числа. Увеличиваем счётчик цифр на 1, после чего уменьшаем число в 10 раз. Далее с получившимся числом проделываем ту же операцию до тех пор, пока не получим число ноль.

```

Program Example_8;
Var m, n: Longint;
      k: Integer; {счетчик цифр}
Begin
  Writeln(' Введите целое число'); {вводим целое
                                     число n}

  Readln(n); m:=n;
  k:=0;
  While m<>0 Do      {пока (While) число m<>0
                     делать(Do)}

    Begin
      Inc(k); {или k:=k+1;}
      m:=m Div 10; {“уменьшаем” число на по-
                   следнюю цифру}

    End;
  Writeln(' В числе ',n,' – ',k,' цифр!'); {вывод
                                           количества цифр}

  Readln;
End.

```

Цикл с постусловием.

Repeat

<оператор 1>

<оператор 2>

.....

<оператор n>

Until <условие>

Этот оператор отличается от оператора цикла с предусловием тем, что проверка условия проходит после очередного шага цикла. Благодаря этому тело цикла выполняется минимум 1 раз. Также обратите внимание на то, что данный цикл предполагает наличие нескольких операторов в теле цикла, а это значит что операторные скобки Begin, End не нужны.

При описании циклов с постусловием необходимо обратить внимание на следующие вещи:

- перед первым выполнением цикла условие его окончания или продолжения должно быть определено;
- тело цикла должно содержать оператор, влияющий на условие окончания цикла;
- условие окончания цикла должно быть в итоге выполнено.

Пример использования цикла с постусловием.

Составить алгоритм планирования закупки товара в магазине на сумму, не превышающую заданное значение:


```

Program Example_10;
Var x, k, p, s: Integer;
Begin
  WriteLn('Предельная сумма - '); ReadLn(p);
  s:=0;
  Repeat
    WriteLn('Введите цену товара и его количество');
    ReadLn(x,k);
    s:=s+x*k;
    WriteLn('Стоимость покупки равна ',s);
  Until s>p;
  WriteLn('Суммарная стоимость покупки превысила предельную сумму');
End.

```

Задание 1. Дана непустая последовательность натуральных чисел, оканчивающаяся нулём. Найти в данной непустой последовательности наибольший и наименьший элементы, а также среднее значение элемента, входящего в эту последовательность.

Задание 2. Числа Фибоначчи (f_n) определяются формулами:

$$f_0=f_1=1; f_n=f_{n-1}+f_{n-2} \text{ при } n=2,3,\dots$$

Написать программы:

- определения сорокового члена ряда f_{40} ;
- поиска первого числа Фибоначчи большего заданного числа S;
- вычисления суммы всех чисел ряда, которые не превосходят 1000.

6. Алгоритм Евклида. НОД. НОК.

НОД — наибольший общий делитель чисел; наибольшее целое число, на которое целочисленно делятся оба заданных числа.

Алгоритм Евклида.

Идея этого алгоритма основана на том свойстве, что если $M > N$, то $\text{НОД}(M, N) = \text{НОД}(M-N, N)$. Иначе говоря, НОД двух натуральных чисел равен НОД их положительной разности (модуля их разности) и меньшего числа.

Легко доказать это свойство.

Пусть K — общий делитель M и N ($M > N$). Это значит, что $M = mK$, $N = nK$, где m, n — натуральные числа, причём $m > n$. Тогда $M - N = K(m - n)$, откуда следует, что K — делитель числа $M - N$. Значит, все общие делители чисел M и N являются делителями их разности $M - N$, в том числе и наибольший общий делитель.

Второе очевидное свойство: $\text{НОД}(M, M) = M$.

Для «ручного» счёта алгоритм Евклида выглядит так:

- если числа равны, то взять любое из них в качестве ответа, в противном случае продолжить выполнение алгоритма;
- заменить большее число разностью большего и меньшего из чисел;
- вернуться к выполнению п. 1.

```

Program Evklid;
var M, N: integer;
begin
  writeln('Введите M и N');
  readln(M, N);
  while M<>N do
    begin
      if M>N
      then M:=M-N
      else N:=N-M
    end;
  write('НОД=',M)
end.

```

НОК — наименьшее общее кратное; наименьшее целое число, которое целочисленно делится на оба заданных числа.

Пример: НОК (8, 10) = 40.

Задание 1. Составьте программу нахождения наименьшего общего кратного (НОК) двух чисел, используя формулу:

$$A \times B = \text{НОД}(A, B) \times \text{НОК}(A, B).$$

Задание 2. Даны натуральные числа m , n . Получить все кратные им числа, меньшие $m \cdot n$.

7. Вложенные циклы.

Рассмотрим на примере.

Даны два натуральных числа n и k . Напишите программу для расчёта следующего выражения: $1^k + 2^k + \dots + n^k$.

Создадим два цикла, вложенные один в другой. Внутренний цикл будет отвечать за вычисление числа в заданной степени. Внешний же — будет включать в себя внутренний цикл и суммирование.

```

Program Example_13;
Var n, k, y, i, s, m: Integer;
Begin
  Writeln ('Введите исходные данные n и k');
  ReadLn(n,k);
  s:=0;
  For i:=1 To n Do
    Begin y:=1;
      For m:=1 To k Do y:=y*i;      {нахождение
                                     степени k числа i}
    s:=s+y;
  End;
  WriteLn('Ответ: ',s);
End.

```

Таким образом, для решения задачи мы организовали два цикла, один из которых включает в себя другой. Такие конструкции и называют вложенными циклами. Обратите внимание, что вложенными циклами могут быть не только циклы с параметром, но и циклы с пост и предусловием. Правила организации циклов такие же, как для простого цикла. Но при использовании вложенных циклов соблюдается правило — внутренний цикл должен полностью укладываться в циклическую часть внешнего цикла.

Задание 1. Модифицируйте предыдущую программу для расчёта следующего выражения: $1^1 + 2^2 + \dots + n^n$.

Задание 2. Сколько можно купить быков, коров и телят, если плата за быка 10 руб., за корову 5 руб., за телёнка 0.5 руб., если на 100 рублей надо купить 100 голов скота. Вывести все возможные варианты покупки.

8. Решение различных задач.¹

Задание 1. Написать программу для графического отображения количества делителей чисел от 1 до n .

Например, если $n=4$ на экране увидим:

1+

2++

3++

4+++

Задание 2. Написать программу, считающую, сколько раз данная цифра встречается в числе.

Задание 3. Написать программу, меняющую порядок цифр числа на противоположный (исходное число — 12345, результат — 54321).

Задание 4. Дана последовательность из 20 целых чисел. Определить число, в котором содержится самая длинная последовательность нулей.

Задание 5. Натуральное число, состоящее из n цифр, является числом Армстронга, если сумма его цифр, возведённых в n -ую степень, равна самому числу. Найти все числа Армстронга в интервале от 1 до 9999.

Задание 6. Дан ряд из n чисел. Найти наибольшее и наименьшее из них.

Задание 7. Составить программу возведения числа в квадрат, используя следующую закономерность:

$$1^2=1, 2^2=1+3, 3^2=1+3+5, 4^2=1+3+5+7, \\ n^2=1+3+5+7+\dots+(2n-1).$$

¹Бабушкина И.А., Бушмелева Н.А., Окулов С.М., Черных С.Ю. Практикум по Турбо Паскалю. Учебное пособие по курсам «Информатика и вычислительная техника», «Основы программирования». — Москва, АБФ, 1998. — 384 с.

В.В. Мендель,
директор ФГБОУ ВО ПИ ТОГУ,
г. Хабаровск

Прямая, окружность и координаты

Часть I. Прямая и координаты.

1. Прямая на плоскости.

Прямая линия, как объект геометрии, хорошо известна. Но она встречается и в алгебре, как график *линейной* функции

$$y = k \cdot x + b. \quad (1)$$

Хорошо известно, что угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой к координатной оси Ox , а коэффициент b равен ориентированной (взятой с положительным или отрицательным знаком) длине отрезка оси Ox , заключённого между началом координат и точкой пересечения прямой с этой координатной осью. Уравнение (1) можно записывать и в другой форме, давая новым представлениям различные интерпретации.

Наша задача: исследовать свойства прямой, рассматривая её уравнения и коэффициенты, и применить новые знания для решения задач геометрии.

Для начала заметим, что уравнение линейной функции указывает связь между координатами точек, принадлежащих данной прямой. Точнее, это уравнение позволяет вычислять вторую координату y точки прямой, если известна первая координата x этой точки.

1.1. Прямая, проходящая через заданную точку.

Предположим, что нам нужно провести (построить, задать) на координатной плоскости прямую, которая составляет с осью Ox известный угол α и проходит через точку M_0 с координатами (x_0, y_0) (рис. 1).

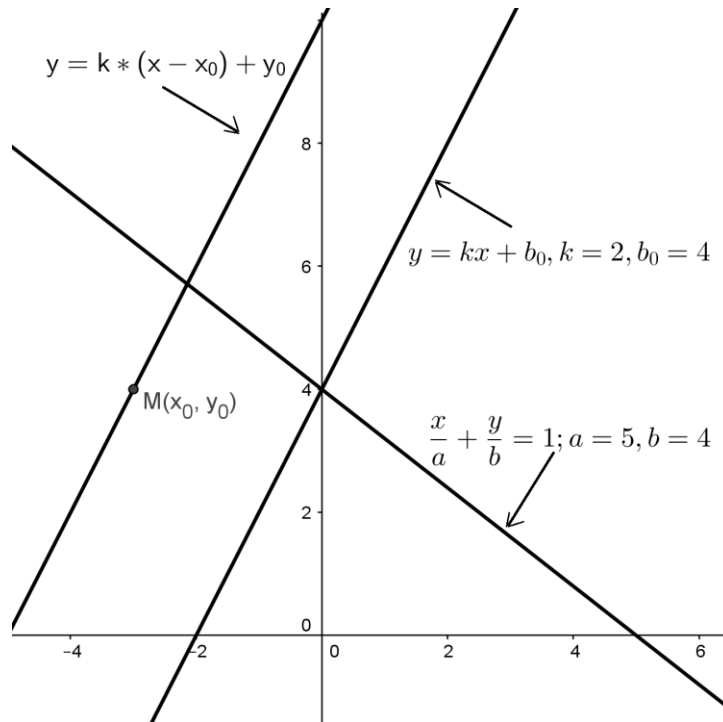


Рис. 1.

Нетрудно проверить, что такая прямая задаётся уравнением:

$$y = k(x - x_0) + y_0, \quad (2)$$

где $k = \tan \alpha$. Очевидно, что когда $x = x_0$, тогда $y = y_0$.

Используя данный способ задания прямой, можно составить уравнения нескольких прямых, проходящих через данную точку. Такая возможность может пригодиться, если, например, будет исследоваться треугольник, и две прямые будут задавать его стороны.

1.2. Уравнение прямой в отрезках.

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (3)$$

Из него очень просто выразить переменную y через переменную x , то есть, свести это уравнение к уравнению линейной функции. Это означает, что уравнение (3) тоже определяет прямую линию на плоскости (рис. 1). «Зануляя» поочерёдно первую и вторую координаты, мы можем убедиться, что эта прямая проходит через точки с координатами $(a; 0)$ и $(0; b)$, то есть отсекает от координатных осей отрезки (ориентированной) длины a и b соответственно.

1.3. Общее уравнение прямой.

Рассмотрим линейное уравнение относительно двух переменных x и y :

$$Ax + By + C = 0. \quad (4)$$

В этом уравнении нет явного выражения одной переменной через другую, оно просто «связывает» две переменных некоторым *аналитическим* условием. Впрочем,

небольшие манипуляции помогут нам легко выразить переменную y через переменную x :

$$y = -\frac{A}{B}x + (-C),$$

то есть мы вновь получили линейную функцию, аналогичную формуле (1).

Уравнение (4) называют *общим уравнением прямой на плоскости*. Заметим, что уравнение (3) является его частным случаем.

1.4. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Зададим на плоскости две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Рассмотрим уравнение:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (5)$$

Очевидно, что координаты обеих выбранных нами точек удовлетворяют этому уравнению. Кроме того, простейшими преобразованиями это уравнение можно свести к общему уравнению прямой. Таким образом, уравнение (5) задаёт прямую, проходящую через две выбранные нами точки.

1.5. Одна модификация общего уравнения прямой.

Представим запись общего уравнения прямой, аналогичную записи уравнения линейной функции формулой (2):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (6)$$

Очевидно, что координаты точки $M_0(x_0, y_0)$ удовлетворяют этому уравнению, то есть задаваемая уравнением (6) прямая проходит через точку M_0 . Чуть позже мы будем рассматривать геометрический смысл коэффициентов общего уравнения и поймём, что данный способ определения прямой очень полезен.

2. Немного про коллинеарность и перпендикулярность векторов на плоскости.

Здесь мы рассмотрим короткий сюжет, касающийся признаков коллинеарности и перпендикулярности векторов плоскости, связанных с их координатами.

2.1. Признак коллинеарности.

Напомним, что два вектора называют *коллинеарными*, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой. Обозначение: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому, и мы его не рассматриваем.

В координатах признак коллинеарности звучит так: *векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны*:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

Для того чтобы избежать пространственных объяснений для случая, когда одна из координат вектора зануляется, перепишем этот признак в другом виде:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0. \quad (7)$$

2.2. Признак перпендикулярности векторов на плоскости.

Сначала рассмотрим два вектора: $\vec{a}(a,b)$ и $\vec{b}(b,-a)$. Длины этих векторов равны друг другу и равны $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Рассмотрим треугольник, построенный на этих двух векторах (рис. 2). Его третья сторона $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ имеет координаты $(a-b, a+b)$, а её длина равна $|\vec{c}| = \sqrt{2a^2 + 2b^2}$. Из теоремы, обратной теореме Пифагора, следует, что этот треугольник прямоугольный, то есть векторы $\vec{a}(a,b)$ и $\vec{b}(b,-a)$ перпендикулярны.

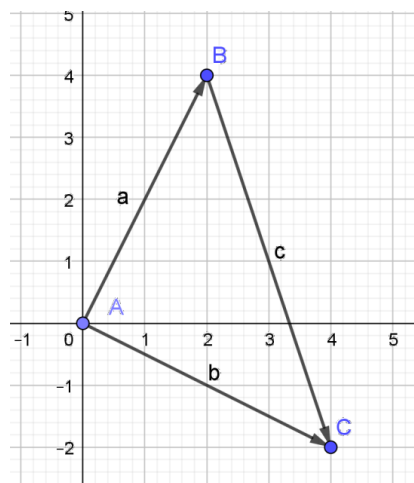


Рис. 2.

Теперь заметим, что любой вектор $\vec{m}(m_1, m_2)$ плоскости, перпендикулярный вектору $\vec{a}(a,b)$, коллинеарен вектору $\vec{b}(b,-a)$, то есть благодаря формуле (7)

$$bm_2 - (-a)m_1 = 0.$$

Немного преобразовав это выражение, получим признак перпендикулярности двух векторов на плоскости:

$$\vec{a} \perp \vec{m} \Leftrightarrow am_1 + bm_2 = 0. \quad (8)$$

Замечание 1. Мы всюду считаем, что координаты векторов найдены в *ортонормированном* базисе.

Замечание 2. Полученное здесь условие перпендикулярности (8) легко выводится в 9 классе после изучения темы «Скалярное произведение векторов».

3. Параллельность и перпендикулярность прямых на плоскости.

Теперь мы рассмотрим разные способы, позволяющие определять, являются ли две прямые, заданные своими уравнениями, параллельными или перпендикулярными.

3.1. Параллельность прямых, заданных как линейные функции.

Тут всё достаточно просто. Пусть прямые l_1 и l_2 , являются графиками линейных функций $y = k \cdot x + b_1$ и $y = k \cdot x + b_2$ соответственно. Так как их угловые коэффициенты (они же – тангенсы угла между прямой и осью Ox) равны, то прямые образуют равные углы с координатной осью Ox и поэтому параллельны.

3.2. Параллельность прямых, заданных общими уравнениями.

Рассмотрим две прямые l_1 и l_2 , которые на этот раз заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. В пункте 1.3. мы показали, что такие уравнения можно свести к уравнениям линейной функции с угловыми коэффициентами $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}$ и $k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$. Из предыдущего пункта следует, что прямые параллельны тогда и только тогда, когда равны их угловые коэффициенты, то есть:

$$k_1 = k_2, \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}, \text{ или } A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0. \quad (9)$$

Эта формула сильно напоминает признак (7) коллинеарности векторов на плоскости, и данное совпадение не случайно.

3.3. Геометрический смысл коэффициентов общего уравнения прямой на плоскости.

Рассмотрим модифицированное общее уравнение прямой $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$. Предположим, что точка M_1 с координатами (x_1, y_1) тоже лежит на данной прямой, а значит, её координаты удовлетворяют данному уравнению:

$$A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = 0.$$

Но вектор $\overrightarrow{M_0 M_1}$ с координатами $((x_1 - x_0); (y_1 - y_0))$ тоже лежит на рассматриваемой прямой, и он, согласно условия (8), перпендикулярен вектору $\vec{n}(A, B)$. Таким образом, коэффициенты общего уравнения прямой задают вектор $\vec{n}(A, B)$, перпендикулярный этой прямой. Этот вектор называют вектором *нормали*.

Замечание. Нетрудно заметить, что если векторы нормали двух прямых коллинеарны, то сами эти прямые параллельны. Полученное выше условие (9) параллельности двух прямых одновременно является условием коллинеарности векторов нормали этих прямых.

3.4. Признак перпендикулярности двух прямых, заданных общими уравнениями.

Вновь рассмотрим две прямые l_1 и l_2 , которые заданы уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$. Очевидно, что две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда векторы нормали этих прямых $\vec{n}_1(A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2)$ перпендикулярны. Условие перпендикулярности (8) даёт нам следующую формулу, являющуюся аналитическим признаком перпендикулярности двух прямых, заданных общими уравнениями:

$$A_1 B_1 + A_2 B_2 = 0. \quad (10)$$

3.5. Признак перпендикулярности прямых, заданных как графики линейных функций.

Пусть перпендикулярные прямые l_1 и l_2 , являются графиками линейных функций $y = k_1 \cdot x + b_1$ и $y = k_2 \cdot x + b_2$ соответственно. От уравнений линейных функций легко перейти к общим уравнениям: $k_1 \cdot x + (-1) \cdot y + b_1 = 0$ и $k_2 \cdot x + (-1) \cdot y + b_2 = 0$. Применяв к коэффициентам этих уравнений условие перпендикулярности (10), получим:

$$k_1 \cdot k_2 + 1 = 0, \text{ или } k_2 = -\frac{1}{k_1}. \quad (11)$$

4. Вычисление расстояния от точки до прямой.

4.1. Особый случай.

Рассмотрим прямую l , заданную уравнением «в отрезках» $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, и найдём расстояние от этой прямой до начала координат. Сделать это довольно просто. Два отрезка, лежащие на координатных осях, являются катетами прямоугольного треугольника с вершиной в начале координат. Сама прямая проходит через гипотенузу этого треугольника. Таким образом, высота, проведённая из вершины прямого угла к гипотенузе, по длине равна расстоянию от начала координат до прямой. Высоту (и расстояние) легко вычислить как произведение длин катетов, делённое на длину гипотенузы треугольника (длину гипотенузы вычисляем с помощью теоремы Пифагора):

$$\rho(O, l) = \frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (12)$$

4.2. Вычисление расстояния до начала координат от прямой, заданной общим уравнением.

Рассмотрим общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$. Перенесём свободный член уравнения в правую часть и преобразуем получившееся выражение к виду, соответствующему уравнению «в отрезках»:

$$\frac{x}{(-C/A)} + \frac{y}{(-C/B)} = 1.$$

Подставим найденные значения «отрезков» в формулу (12), выполним преобразования и получим:

$$\rho(O, l) = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (13)$$

4.3. Вычисление расстояния между параллельными прямыми.

Рассмотрим две параллельных прямых, заданных общими уравнениями $Ax + By + C_1 = 0$ и $Ax + By + C_2 = 0$. Расстояние между ними можно выразить, как сумму или разность расстояний от каждой из них до начала координат. Рассмотрев отдельно случаи, когда начало координат лежит по одну и по разные стороны от прямых, можно получить следующую общую формулу:

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (14)$$

4.4. Вычисление расстояния от прямой до произвольной точки.

Для начала заметим, что расстояние между параллельными прямыми равно расстоянию от любой точки первой прямой до второй прямой (рис. 3).

Исходя из этого, рассмотрим параллельные прямые, заданные уравнениями $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ и $Ax + By + C = 0$.

Нетрудно заметить, что свободный член первого уравнения после раскрытия скобок будет равен $-Ax_0 - By_0$. С учётом этого, применяя формулу (14), получаем:

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (15)$$

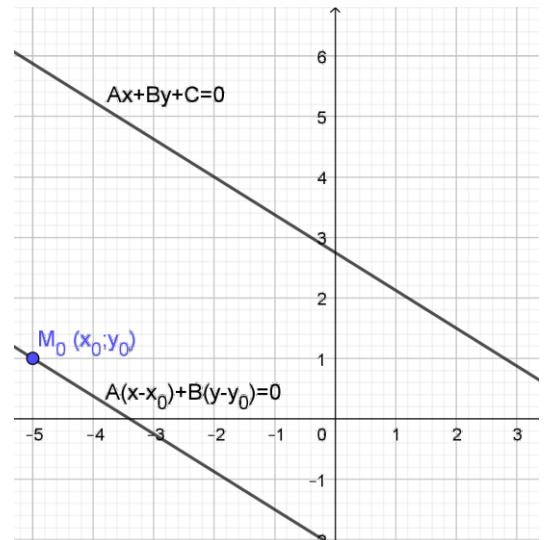


Рис. 3.

5. Задачи и упражнения.

1. Преобразуйте общее уравнение прямой:

а) в уравнение линейной функции;

б) в уравнение «в отрезках»:

1.1. $5x + 6y - 8 = 0$,

1.3. $12x + \frac{y}{7} = 3$,

1.2. $x - 3y + 2 = 0$,

1.4. $5x + 99y - \frac{9}{11} = 0$.

2. Найдите общее уравнение прямой, проходящей через точку M_0 параллельно данной прямой l , постройте чертёж в системе координат:

2.1. $M_0(4;7)$, $l: y = 6x - 9$,

2.3. $M_0(1;0)$, $l: \frac{x}{3} + \frac{y}{8} = 1$,

2.2. $M_0(6;-2)$, $l: 6x - 9y + 6 = 0$,

2.4. $M_0(0;-7)$, $l: (y - 8)/9 = 6x - 9$.

3. Найдите уравнения прямых, параллельных прямой l , расположенных на расстоянии 4 от начала координат, постройте чертёж:

3.1. $l: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$,

3.2. $l: 6x - 12y + 6 = 0$.

4. Вычислите расстояние между параллельными прямыми l_1 и l_2 :

4.1. $l_1: 4x - y + 2 = 0$, $l_2: 4x - y + 32 = 0$,

4.3. $l_1: y = 4x - 2$, $l_2: y = 4x + 3$,

4.2. $l_1: 4x - y + 2 = 0$, $l_2: 8x - 2y - 12 = 0$,

4.4. $l_1: \frac{x}{12} + \frac{y}{5} = 1$, $l_2: \frac{x}{12} + \frac{y}{5} = 13$.

5. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку M_0 перпендикулярно данной прямой l , постройте чертёж в системе координат:

5.1. $M_0(4;7)$, $l: y = 6x - 9$,

5.3. $M_0(1;0)$, $l: \frac{x}{3} + \frac{y}{8} = 1$,

5.2. $M_0(6;-2)$, $l: 6x - 9y + 6 = 0$,

5.4. $M_0(0;-7)$, $l: (y - 8)/9 = 6x - 9$.

6. Завершите рассуждения пункта 4.3. относительно вывода формулы (14).

7. Выведите формулу $S = |a_1b_2 - a_2b_1|$ для вычисления площади параллелограмма, две смежные стороны которого являются векторами с координатами $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ соответственно.

8. Используя результат предыдущей задачи, докажите, что у любого параллелограмма, все вершины которого имеют целочисленные координаты, площадь является целым числом.

Часть II. Окружность и координаты.

1. Уравнение окружности.

Окружностью называют линию на плоскости, все точки M которой (и только они) удалены от выделенной точки O — *центра* на расстояние. Отрезок OM называют *радиусом* окружности. Часто радиусом также называют и длину этого отрезка, что не совсем точно.

1.1. Уравнение окружности.

Мы будем рассматривать окружность с центром в точке $O(x_0; y_0)$, длина радиуса которой равна R . Пусть $M(x; y)$ — некоторая точка этой окружности. По условию длина радиуса OM равна R . Опишем это условие аналитически:

$$|OM| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R.$$

Избавляясь от иррациональности, возведём обе части этого выражения в квадрат. В результате получим каноническое уравнение окружности:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad (16)$$

Замечание. Подставляя координаты любой точки в уравнение (16) мы можем проверить, принадлежит ли эта точка окружности.

1.2. Взаимное расположение окружности и прямой.

Общеизвестно, что окружность и прямая могут находиться в следующих конфигурациях:

- не иметь общих точек (не пересекаться);
- иметь одну общую точку (касаться, тогда прямую называют *касательной* к окружности в данной точке);
- иметь две общие точки (пересекаться, в этом случае прямую называют *секущей*).

Будем считать, что прямая l задана уравнением $Ax + By + C = 0$, а окружность Ω уравнением $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Расстояние от прямой до центра окружности по формуле (15) имеет выражение:

$$\rho(O, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (17)$$

Когда это расстояние больше R , окружность и прямая не пересекаются; если расстояние равно R , мы получаем касательную; если расстояние меньше R — секущую.

Отдельно обратим внимание на случай, когда расстояние от прямой до центра окружности равно нулю. Это означает, что прямая проходит через центр окружности.

С модулем в числителе формулы (17) связан замечательный факт, относящийся к свойствам касательных, проведённых к окружности из одной и той же внешней точки. Мы можем составить уравнение вида (6) с неизвестными коэффициентами A и B при переменных x и y . Затем подставим это уравнение в формулу (17) и приравняем полученное выражение к радиусу. Так как модуль в числителе можно раскрыть двумя способами, мы получим в итоге два уравнения обеих касательных.

2. Взаимное расположение двух окружностей.

Взаимное расположение двух окружностей, и вообще геометрические конструкции, в которых участвуют несколько окружностей, приводят к весьма увлекательным исследованиям и интересным фактам. Для начала мы рассмотрим пару пересекающихся окружностей.

2.1. Пересекающиеся окружности.

Для того чтобы две окружности пересекались, необходимо выполнение следующих условий: *некоторые точки первой окружности должны находиться по отношению к центру второй окружности на расстоянии, меньшем чем длина радиуса второй окружности, и наоборот.*

Таким образом, если мы рассматриваем уравнения двух пересекающихся окружностей

$$\Omega_1: (x - x_{O_1})^2 + (y - y_{O_1})^2 = R_1^2 \text{ и } \Omega_2: (x - x_{O_2})^2 + (y - y_{O_2})^2 = R_2^2,$$

то сумма длин их радиусов должна быть меньше расстояния между центрами:

$$|O_1O_2| < R_1 + R_2. \quad (18)$$

В аналитической форме условие будет выглядеть так:

$$(x_{O_2} - x_{O_1})^2 + (y_{O_2} - y_{O_1})^2 < (R_1 + R_2)^2. \quad (18^*)$$

2.2. Касающиеся окружности.

Мы говорим, что окружности *касаются*, если они имеют только одну общую точку. Сразу отметим, что возможны два вида касания окружностей:

- 1) *внешнее*, когда ни одна из окружностей не лежит внутри другой;
- 2) *внутреннее*, когда одна из окружностей находится внутри другой (в том числе и её центр!).

Для первого случая условие касания примет вид:

$$(x_{O_2} - x_{O_1})^2 + (y_{O_2} - y_{O_1})^2 = (R_1 + R_2)^2, \quad (19)$$

а для второго:

$$(x_{O_2} - x_{O_1})^2 + (y_{O_2} - y_{O_1})^2 = (R_1 - R_2)^2. \quad (20)$$

Сформулируем два важных факта, относящихся к касающимся окружностям.

Теорема 1. Точка касания двух окружностей лежит на прямой, проходящей через их центры (на линии центров).

Теорема 2. Прямая, проходящая через точку касания двух окружностей перпендикулярно их линии центров, является общей касательной этих окружностей.

3. Задачи и упражнения.

1. Докажите теорему 1, используя метод координат. Для удобства считайте, что центр одной из окружностей совпал с началом координат, а центр второй окружности лежит на оси Ox . Тогда достаточно показать, что вторая координата точки касания равна нулю.

2. Составьте уравнения касательных к окружности, длина радиуса которой равна 4, а центр находится в начале координат. Касательные проведены из точки M_0 с координатами $(22; 1)$.

3. Докажите, что множество точек, таких, что произведения отрезков секущих, проведённых из них к двум окружностям, равны — это прямая линия, перпендикулярная линии центров окружностей. (Эту прямую называют *радикальной осью* для двух окружностей).

4. Найдите уравнения общих внешних касательных двух окружностей. Центр первой окружности совпадает с началом координат, а её радиус равен 2. Координаты центра второй окружности $(8; 0)$, а радиус равен 4.

5. Докажите, что множество точек, таких, что отношение расстояний от каждой из них до концов заданного отрезка есть постоянная величина, является окружностью (её называют *окружностью Апполония*).

Часть III. Дополнительный справочный материал по конфигурациям окружностей и других геометрических объектов.

3.1. Вписанный угол. Теорема синусов.

Свойства угла, вписанного в окружность, подробно изучаются в школьном курсе геометрии. Тем не менее, эта конструкция достойна отдельного упоминания, так как из неё можно получить очень полезное доказательство теоремы синусов.

Теорема о вписанном угле.

Величина угла, вписанного в окружность, равна половине величины центрального угла, опирающегося на ту же дугу (рис. 4).

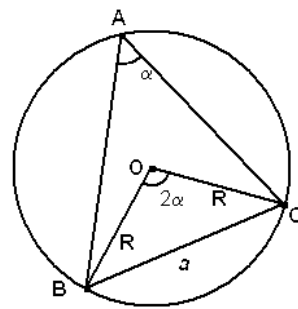


Рис. 4.

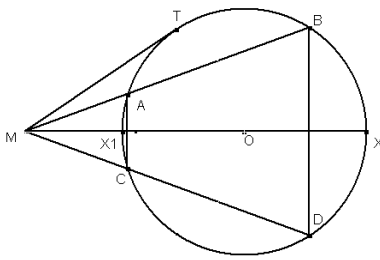


Рис. 5.

Теорема синусов.

В произвольном треугольнике отношения длин сторон треугольника к синусам противолежащих углов есть постоянная величина, равная диаметру описанной вокруг этого треугольника окружности (рис. 5).

3.2. Окружность и касательная. Окружность и секущая. Теоремы о свойствах секущих.

Мы рассмотрим только несколько конструкций, которые для удобства собраны на одном чертеже (рис. 6). Перечислим некоторые их свойства.

Свойство 1. Длины отрезков касательных, проведённых к одной окружности из одной точки M , равны ($MT^2 = MO^2 - R^2$).

Свойство 2. Произведения отрезков двух секущих к одной окружности равны ($MA \cdot MB = MC \cdot MD$).

Свойство 3. Произведение отрезков внешней секущей равно квадрату отрезка касательной, проведённой из той же точки ($MA \cdot MB = MT^2 = MO^2 - R^2$).

Далее рассмотрим случай, когда точка расположена внутри окружности.

Свойство 4 (аналог свойства 2). Произведения отрезков двух секущих к одной окружности равны ($MA \cdot MB = MC \cdot MD$).

Свойство 5 (аналог свойства 3). Произведение отрезков внутренней секущей равно разности квадратов радиуса и расстояния от точки до центра окружности ($MA \cdot MB = R^2 - MO^2$).

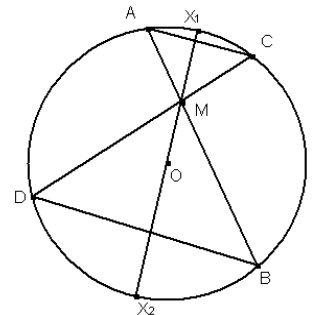


Рис. 6.

3.3. Треугольник и описанная окружность.

Центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. У остроугольного треугольника эта точка находится внутри, у прямоугольного — на середине гипотенузы, а у тупоугольного — вне треугольника.

Из теоремы о вписанном угле следует, что из центра описанной окружности каждая сторона видна под углом в два раза большем, чем противолежащий угол треугольника.

Частные случаи: прямоугольный, равнобедренный и равносторонний треугольники.

Как уже отмечалось выше, у прямоугольного треугольника центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы. Отсюда следует, что радиус описанной вокруг прямоугольного треугольника окружности равен половине его гипотенузы.

Справедлива также следующая **теорема**. Если радиус описанной окружности некоторого треугольника равен половине длины одной из его сторон, то этот треугольник — прямоугольный.

Рассмотрим теперь равнобедренный треугольник (рис. 7). Так как высота, проведённая к основанию такого треугольника, одновременно является серединным перпендикуляром и биссектрисой, то центр описанной окружности лежит на высоте (или её продолжении).

Рассмотрим, наконец, равносторонний или правильный треугольник. В этом треугольнике высоты являются медианами, биссектрисами и серединными перпендикулярами. Поэтому центр описанной окружности совпадает с точкой пересечения медиан.

Так как точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении 2 к 1, считая от вершины, то радиус описанной окружности равен двум третьим от высоты. Таким образом, $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, где a — сторона треугольника.

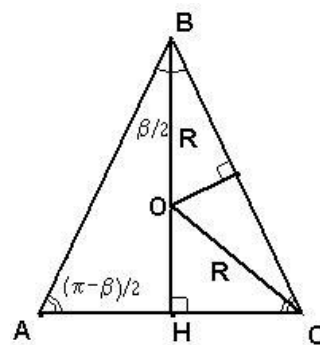


Рис. 7.

3.4. Треугольник и вписанная (внеписанная) окружность.

Центр *вписанной* окружности лежит на пересечении биссектрис внутренних углов треугольника. Радиус этой окружности и точки касания можно определить, опустив перпендикуляр из центра на сторону. Довольно распространенной является такая ошибка: за точку касания окружности и стороны принимают точку пересечения стороны и биссектрисы (рис. 8).

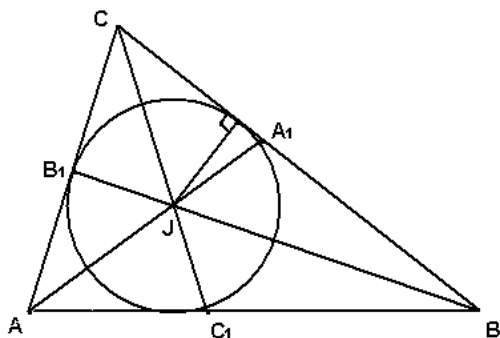


Рис. 8.

Рассмотрим некоторые свойства описанного треугольника (рис. 9).

Пусть x , y , z — отрезки, на которые точки касания вписанной окружности делят стороны треугольника. Эти отрезки можно выразить через стороны треугольника, решив следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = c \\ y + z = a \\ x + z = b. \end{cases}$$

Получим:

$$\begin{cases} 2x = b + c - a \\ 2y = a + c - b \\ 2z = a + b - c. \end{cases}$$

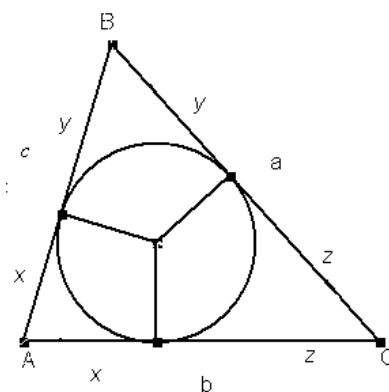


Рис. 9.

Если вписанные окружности всем хорошо знакомы, то *внеписанные* встречаются реже. Поясним, чем они отличаются от вписанных.

Итак, *центр внеписанной* окружности лежит вне треугольника (рис. 10). Это точка пересечения биссектрис одного внутреннего и двух внешних углов треугольника. *Внеписанная* окружность касается одной стороны и продолжений двух других сторон треугольника.

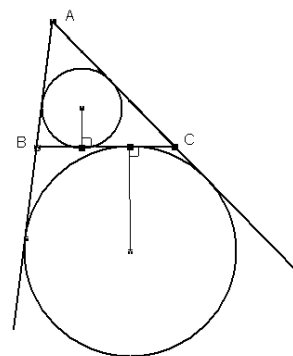


Рис. 10.

Для треугольника существует три внеписанных окружности. На рисунке 10 изображены вписанная и внеписанная окружности. Хорошо видно, что точки касания этих окружностей со стороной треугольника не совпадают.

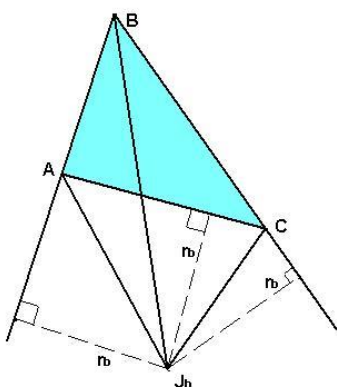


Рис. 11.

Найдём выражения для радиусов вписанной и внеписанной окружностей. Начнём со случая вписанной окружности. «Разрежем» треугольник на три треугольника так, как показано на рисунке 11. Каждый из них имеет высоту, равную радиусу вписанной окружности. Сумма площадей трёх треугольников равна площади большого:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}r(a + b + c) = \frac{1}{2}rP.$$

Отсюда легко получить формулу для вычисления радиуса вписанной окружности:

$$r = \frac{2S}{P}.$$

Радиусы внеписанных окружностей можно получить аналогично. Представим площадь треугольника ABC так:

$$S = S_{ABJ_b} + S_{CBJ_b} - S_{ACJ_b}.$$

Далее применим те же рассуждения, что и ранее. В результате получим следующую формулу: $r_b = \frac{2S}{a + c - b}.$

3.5. Расстояние между центрами описанной и вписанной (внеписанной) окружностей.

Замечательный математик Леонард Эйлер вывел замечательную формулу, выражающую расстояние между центрами описанной и вписанной (внеписанной) окружностей треугольника. Вот она:

$$OJ^2 = R^2 - 2Rr \text{ (для вписанной)}$$

$$\text{и } OJ_b^2 = R^2 + 2Rr_b \text{ (для внеписанной) окружностей.}$$

Из первой формулы следует, что радиус вписанной окружности не менее чем в два раза меньше радиуса описанной окружности. Равенство выполняется только для равностороннего треугольника.

Частные случаи: прямоугольный, равнобедренный и равносторонний треугольники.

Для прямоугольного треугольника (рис. 12) имеется очень изящная формула, выражающая радиус вписанной окружности через его стороны:

$$2r = a + b - c.$$

Для радиуса вписанной окружности равнобедренного треугольника можно получить простое выражение через основание и угол при нём:

$$r = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

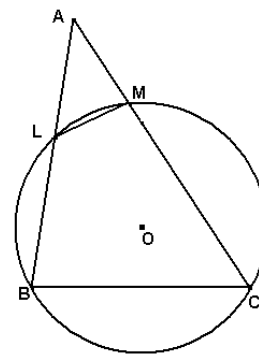


Рис. 12.

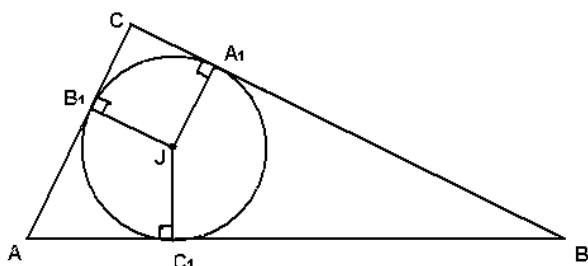


Рис. 13.

3.6. Окружность, проходящая через две вершины треугольника.

Чаще всего в геометрических задачах встречается конфигурация, в которой окружность проходит только через две вершины треугольника, при этом вторично пересекая две его стороны. В такой

конструкции появляются два подобных треугольника ABC и AML, у которых соответственные стороны ML и BC не параллельны (рис. 13).

Рассмотрим некоторые примеры, в которых появляется такая конструкция.

Пример 1. Окружность, проходящая через две вершины и основания двух высот треугольника (в этом случае сторона AC будет диаметром окружности).

В этой конфигурации коэффициент подобия треугольников равен косинусу угла при третьей вершине: $k = \cos \angle A$ (рис. 14).

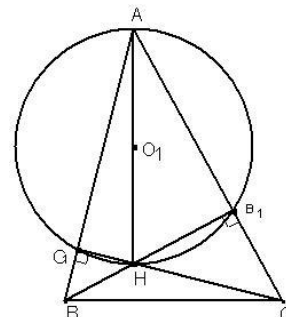


Рис. 14.

Взглянем на эту же конструкцию с другой стороны (рис. 15).

Пример 2. Пусть одна из сторон треугольника (например, BC) является диаметром окружности, а L и M — точки пересечения

окружности с двумя другими сторонами. Тогда из этих точек диаметр окружности виден под прямым углом.

Нетрудно увидеть, что отрезки BM и CL являются высотами треугольника.

3.7. Окружность, касающаяся двух сторон треугольника.

На математических олимпиадах нередко предлагаются задачи, в которых рассматриваются либо угол и вписанная в него окружность, либо равнобедренный треугольник, касающийся некоторой окружности в двух своих вершинах. При этом обычно присутствует ещё один элемент — секущая угла, касающаяся окружности в

некоторой точке. Описанная здесь конструкция — не что иное, как треугольник и вневписанная окружность.

При решении задач бывает полезно следующее **свойство**, которое кажется очевидным: *длина отрезка DE равна сумме длин отрезков DB и EC .*

3.8. Окружность, касающаяся одной из сторон треугольника в вершине.

Так как *угол между хордой и касательной к окружности равен половине центрального угла, опирающегося на хорду*, то изображённые на чертеже треугольники ABD и ABC имеют равные углы при вершинах B и C соответственно. А если учесть, что угол при вершине A у них общий, то нетрудно заметить, что два этих треугольника подобны.

3.9. Ещё раз о высотах треугольника.

Через точку пересечения высот треугольника (ортоцентр), основания двух высот и третью вершину проходит окружность. *Отрезок $АН$ является диаметром этой окружности.*

Рассмотрим теперь сразу две окружности, проходящие через основания высот (продолжение темы о двух окружностях)(рис. 16).

С парой пересекающихся окружностей и треугольником связан ряд интересных конфигураций.

Первая конструкция. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку B проведена секущая CD .

Вторая конструкция. Две окружности пересекаются в точках A и B . CD — отрезок общей касательной к этим окружностям.

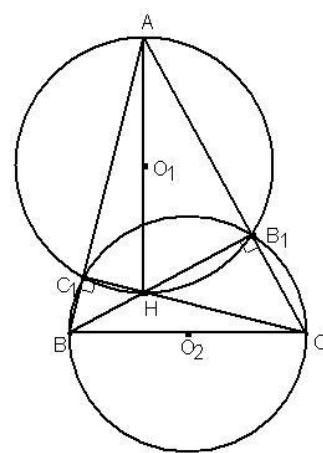


Рис. 16.

Часть IV. Задачи для самостоятельного решения.

1. Две окружности внешне касаются в точке A ; BC — их общая внешняя касательная. Доказать, что $\angle BAC = 90^\circ$.

2. Две окружности пересекаются в точках A и B . Точки A и B лежат по разные стороны от прямой l , которая пересекает окружности соответственно в точках C, D, E и M . Доказать, что сумма углов DBE и CAM равна 180° .

3. Две окружности пересекаются в точках A и B . Прямые l_1 и l_2 параллельны, причём l_1 проходит через точку A и пересекает окружности в точках E и K , а l_2 проходит через точку B и пересекает окружности в точках M и P . Доказать, что четырёхугольник $EKMP$ — параллелограмм.

4. Из точки M проведены к окружности с центром в точке O касательные MA и MB . Прямая l касается окружности в точке C и пересекает MA и MB соответственно в точках D и E . Доказать, что: а) периметр треугольника MDE не зависит от выбора точки C ; б) угол DOE не зависит от выбора точки C .

5. Точки A , B , C и D делят окружность на части, отношение которых $1 : 3 : 5 : 6$. Найти углы между касательными к окружности, проведёнными в точках A , B , C и D .

6. Две равные окружности внешне касаются друг друга и третьей окружности, радиус которой равен 8 см. Отрезок, соединяющий точки касания двух равных окружностей с третьей, равен 12 см. Найти радиусы равных окружностей.

7. Общая хорда двух пересекающихся окружностей равна a и служит для одной окружности стороной правильного вписанного шестиугольника, а для другой — вписанного квадрата. Найти расстояние между центрами окружностей.

8. Две окружности радиусами r и R касаются внешним образом. Найти длину их общей внешней касательной.

9. Две окружности радиусами r и R касаются внешним образом. Прямая l пересекает окружности в точках A , B , C и D так, что $AB = BC = CD$. Найти AD .

10. Две окружности, радиусы которых относятся как $1 : 3$, касаются внешним образом, длина их общей внешней касательной $6\sqrt{3}$ см. Найти периметр фигуры, образованной внешними касательными и внешними дугами окружностей.

11. Из внешней точки к окружности проведены секущая длиной 48 см и касательная, длина которой составляет $\frac{2}{3}$ от внутреннего отрезка секущей. Найти радиус окружности, если известно, что секущая удалена от центра на расстояние 24 см.

ФИЗИКА

*И.Н. Егоришин,
старший преподаватель кафедры «Физика»
ПИ ФГБОУ ВО ТОГУ,
г. Хабаровск*

Основы микроэлектроники

Применение полупроводниковых материалов для изготовления электронных устройств имеет длительную историю: от создания первого детектора на кристалле сернистого свинца до современных компьютеров. Возникла и успешно развивается физическая микроэлектроника, которая рассматривает процессы, происходящие на микроскопическом уровне, и изучает материалы, свойства которых описывает физика твёрдого тела. Физика полупроводников, являясь важной частью физики твёрдого тела, выделилась в самостоятельную науку в результате обнаруженной возможности технического приложения.

Дальнейшее развитие полупроводниковой индустрии позволит создавать вычислительные системы, которые будут оценивать окружающую обстановку и состояние человека, предвосхищая его потребности. Контекстно-ориентированные устройства будущего, включая персональные компьютеры, смартфоны, автомобили и телевизоры, смогут выдавать рекомендации и помогать человеку в течение всего дня, наподобие живого персонального ассистента.

Современная информационная электроника и её перспективные технологии (телекоммуникации, смартфоны, моноблочные ПК, ультрабуки, планшеты и т.д.) базируются и будут базироваться на применении полупроводникового кремния. Другие полупроводниковые материалы (арсенид галлия, фосфид индия, германий, селен и др.), в сравнении с кремнием, ещё достаточно долго будут составлять очень маленькую долю рынка. Примерами использования полупроводниковых приборов в автотранспортном комплексе являются фары, электронные системы зажигания, бортовые компьютеры, позволяющие не только контролировать работу всех систем автомобиля, но и точно определять положение в пространстве, корректировать своё передвижение с использованием глобальной системы позиционирования GPS и ГЛОНАСС. Такие полупроводниковые приборы, как светодиоды, активно используются в светотпорах, фарах и приборных модулях автомобиля. Без вычислительной техники, компьютеров и коммуникационных систем невозможно процветание ни одной из отраслей промышленности, а, в конечном итоге, и государства в целом. Современная кремниевая микроэлектроника изменила не только технологическое, но и социальное лицо мира.

1. Полупроводники.

Все твёрдые вещества по характеру взаимодействия с электрическим током делятся на 3 группы: проводники, полупроводники и изоляторы (диэлектрики). Единственная характеристика, которая отличает эти вещества: концентрация свободных носителей заряда. Обратимся к рисунку 1.



Рис. 1.

В проводниках концентрация свободных носителей заряда очень велика и сравнима с концентрацией атомов, составляющих кристаллическую решётку. В диэлектриках ситуация ровно противоположная — свободных носителей заряда практически нет. Отсюда определим, какие вещества мы будем называть полупроводниками.

Полупроводник — это кристаллический материал, который проводит электричество не столь хорошо, как металлы, но и не столь плохо, как

большинство изоляторов, то есть в нём содержатся подвижные носители заряда, однако их концентрация значительно ниже, чем концентрация атомов, и может изменяться под влиянием температуры, освещения или примесей.

В обычных условиях электроны полупроводников привязаны к своим атомам. Однако, используя внешние воздействия, мы можем отрывать электроны с внешних энергетических орбит, тем самым увеличивая проводимость всего вещества. Каждый вырванный электрон приводит к возникновению ещё одного свободного носителя заряда — дырки. Дырка — отсутствие электрона на валентном уровне атома, которое проявляет себя как положительный заряд, численно равный заряду электрона.

По характеру воздействия, приводящего к возникновению новых свободных носителей заряда, проводимость полупроводников можно разделить на 2 вида:

- примесная;
- собственная.

Собственными полупроводниками являются химически чистые полупроводники, а их проводимость называется собственной проводимостью. Примером собственных полупроводников могут служить химически чистые Ge, Se.

При 0 К и отсутствии других внешних факторов собственные полупроводники ведут себя как диэлектрики. При повышении же температуры электроны с верхних энергетических уровней могут быть выброшены за счёт теплового движения. При наложении на кристалл электрического поля они перемещаются против поля и создают электрический ток. Проводимость собственных полупроводников, обусловленная электронами, называется *электронной проводимостью* или проводимостью *n*-типа (от лат. Negative — отрицательный).

В результате тепловых забросов электронов в валентной зоне возникают вакантные состояния, дырки. Во внешнем электрическом поле на освободившееся от электрона место — дырку — может переместиться электрон с соседнего уровня, а дырка появится в том месте, откуда ушёл электрон, и т. д. Такой процесс заполнения

дырок электронами равносильно перемещению дырки в направлении, противоположном движению электрона, так, как если бы дырка обладала положительным зарядом, равным по величине заряду электрона. Проводимость собственных полупроводников, обусловленная *квазичастицами* — дырками — называется *дырочной проводимостью* или проводимостью *p*-типа (от лат. positive — положительный).

Таким образом, в собственных полупроводниках наблюдаются два механизма проводимости: электронный и дырочный. Число электронов в зоне проводимости равно числу дырок в валентной зоне, так как последние соответствуют электронам, возбуждённым в зону проводимости.

Одновременно с образованием пар носителей заряда часть электронов спонтанно переходит на свободные валентные уровни атомов, излучая квант энергии, и оба носителя заряда исчезают. Этот процесс называется рекомбинацией. При постоянной температуре устанавливается динамическое равновесие, определяющее концентрацию электронов и дырок.

Электропроводность, возникающую за счёт внесения в кристаллическую решётку полупроводника атомов примеси, называют примесной.

Примеси бывают:

- донорные;
- акцепторные.

Донорная примесь — это примесь с большей, чем у кристалла полупроводника, валентностью (рисунок 2а). При добавлении такой примеси в полупроводнике образуются дополнительные свободные электроны. Именно поэтому примесь называется донорной. Преобладает электронная проводимость, а полупроводник называют полупроводником *n*-типа. Например, для кремния с валентностью $n = 4$ донорной примесью является мышьяк с валентностью $n = 5$. Каждый атом примеси мышьяка приведёт к образованию одного электрона проводимости.

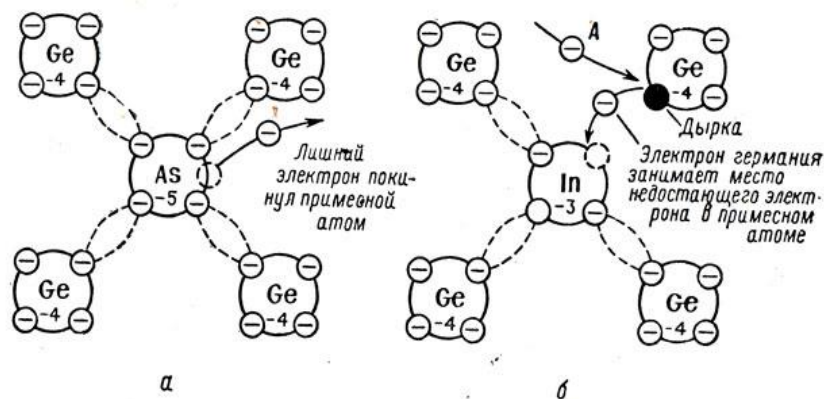


Рис. 2:

а — донорная примесь

б — акцепторная примесь

(это примесь с меньшей, чем у кристалла, валентностью).

При добавлении такой примеси в полупроводнике образуется лишнее количество «дырок». Преобладает дырочная проводимость, а полупроводник называют полупроводником *p*-типа. Например, для кремния акцепторной примесью является индий с валентностью $n = 3$ (рисунок 2б). Каждый атом индия приведёт к образованию

лишней дырки. Таким образом, характером носителей зарядов и значением примесной электропроводности можно управлять, подбирая состав и концентрацию примесей.

В современной технике для изготовления полупроводниковых кристаллов используются элементы четвёртой группы периодической системы Д.И. Менделеева: германий и кремний, атомы которых имеют по четыре электрона на внешних валентных оболочках. В качестве регулирующих примесей, придающих кристаллам требуемые свойства, применяют либо пентавалентные элементы (сурьма, мышьяк, фосфор), либо трёхвалентные (бор, индий, галлий, алюминий).

Количество атомов примеси обычно на несколько порядков меньше количества атомов основного элемента. Так на несколько десятков тысяч атомов германия или кремния приходится только один атом примеси.

2. Электронно-дырочный переход.

Каждый, отдельно взятый полупроводник n - или p -типа обладает двусторонней проводимостью: если изменить направление электрического поля, приложенного к полупроводнику, то в нём изменится лишь направление, а не величина тока. Контакт двух полупроводников с различными типами проводимости называется p - n -переходом. Он обладает очень важным свойством: его сопротивление зависит от направления тока.

Итак, в монокристаллической полупроводниковой пластине между двумя слоями с различного рода проводимостями образуется p - n -переход. В области p - n -перехода наблюдается значительный перепад концентраций носителей зарядов.

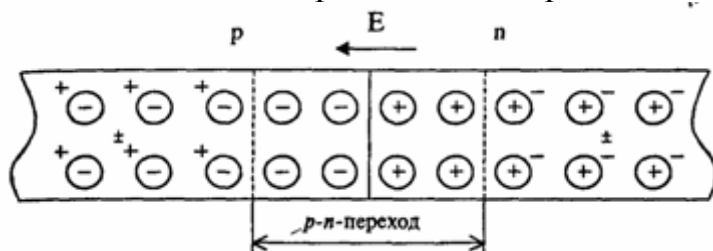


Рис. 3: p - n -переход.

Концентрация электронов в n -области значительно больше их концентрации в p -области. Вследствие этого происходит диффузия электронов из n -области в p -область. В n -области остаются неподвижные положительно заряженные ионы доноров. Одновременно происходит диффузия дырок из p -области в n -область. За счёт этого приграничная p -область приобретает отрицательный заряд, обусловленный отрицательно заряженными ионами акцепторов. Эти прилегающие к переходу области образуют слой объёмного заряда, обеднённый основными носителями (рисунок 3). Области объёмного заряда с каждой стороны перехода имеют заряд, противоположный заряду основных носителей. В слое объёмного заряда возникает контактное электрическое поле E , препятствующее дальнейшему переходу электронов и дырок из одной области в другую.

Именно на возникновении контактного электрического поля и основано действие всех полупроводниковых приборов, некоторые из которых мы разберём подробнее.

3. Полупроводниковые приборы.

Полупроводниковый диод — двухполюсный прибор, имеющий один p – n –переход. По функциональному назначению диоды делят на две группы: выпрямительные и специальные. *Выпрямительные* диоды предназначены для выпрямления переменного тока. В специальных типах полупроводниковых диодов используют различные свойства p – n –перехода: явление пробоя, барьерную ёмкость перехода и т. д. Упрощенная структура диода показана на рисунке 4а, а его условное графическое изображение — на рисунке 4б. Электрод диода, подключенный к p -области, называют анодом (А), а электрод, подключённый к n -области — катодом (К).

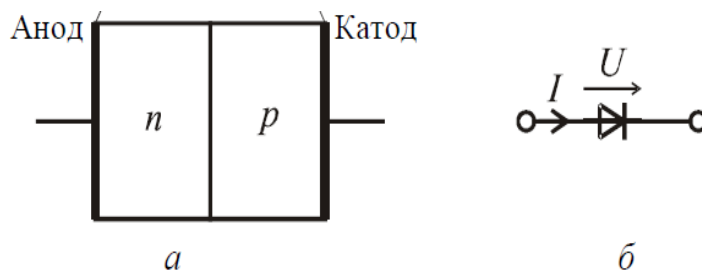


Рис. 4: полупроводниковый диод.

При использовании p – n –перехода в диодах к нему может быть приложено внешнее напряжение. Величина и полярность этого напряжения определяют поведение перехода и проходящий через него электрический ток. Если положительный полюс источника питания подключается к p -области, а отрицательный — к n -области, то включение p – n –перехода называют прямым (рисунок 5а). При изменении указанной полярности включение p – n –перехода называют обратным.

При прямом включении p – n –перехода внешнее напряжение создаёт в переходе поле, которое противоположно по направлению внутреннему диффузионному полю. Напряжённость результирующего поля падает, что сопровождается сужением запирающего слоя. В результате этого большое количество основных носителей зарядов получает возможность диффузионно переходить в соседнюю область (ток дрейфа при этом не изменяется, поскольку он зависит от количества неосновных носителей, появляющихся на границах перехода), т.е. через переход будет протекать результирующий ток, определяемый в основном диффузионной составляющей.

Повышенная диффузия носителей зарядов через переход приводит к повышению концентрации дырок в области n -типа и электронов в области p -типа. Такое повышение концентрации неосновных носителей вследствие влияния внешнего напряжения, приложенного к переходу, называется инжекцией неосновных носителей. Неравновесные неосновные носители диффундируют вглубь полупроводника и нарушают его электронейтральность. Восстановление нейтрального состояния полупроводника происходит за счёт поступления носителей зарядов от внешнего ис-

точника. Это является причиной возникновения тока во внешней цепи, называемого прямым.

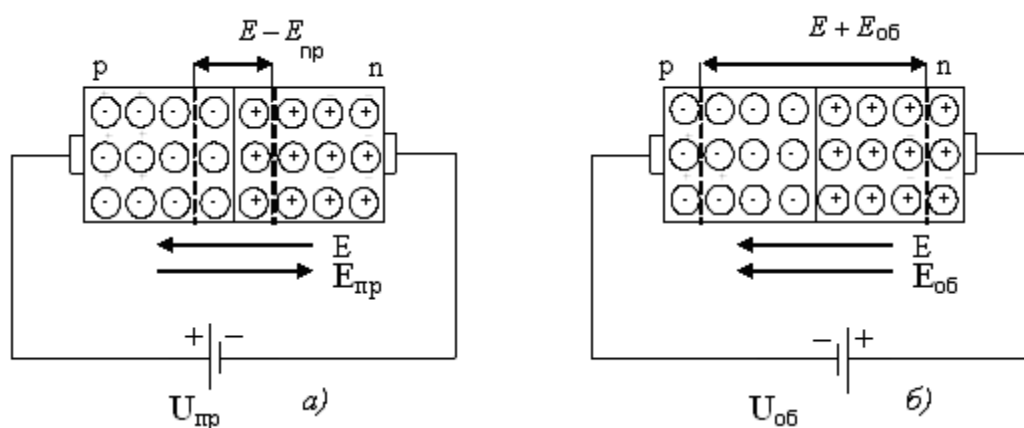


Рис. 5: включение диода в цепь:

а — прямое

б — обратное.

При включении p - n -перехода в обратном направлении (рисунок 5б) внешнее обратное напряжение создаёт электрическое поле, совпадающее по направлению с диффузионным, что приводит к росту потенциального барьера и увеличению ширины запирающего слоя. Всё это уменьшает диффузионные токи основных носителей. Для неосновных носителей поле в p - n -переходе остаётся ускоряющим, и поэтому дрейфовый ток не изменяется.

Таким образом диод в электрической цепи может вести себя двояким образом. Если к диоду приложено прямое напряжение (то есть анод имеет положительный потенциал относительно катода), то диод открыт (через диод течёт прямой ток, диод имеет малое сопротивление). Напротив, если к диоду приложено обратное напряжение (катод имеет положительный потенциал относительно анода), то диод закрыт (сопротивление диода велико, обратный ток мал и может считаться равным нулю во многих случаях).

Биполярный транзистор — трёхполюсный полупроводниковый прибор с двумя p - n -переходами. Он состоит из чередующихся областей полупроводника, имеющих электропроводность различных типов. Биполярный транзистор состоит из трёх областей: эмиттера, базы и коллектора, на каждую из которых подаётся напряжение. В зависимости от последовательности чередования n - и p -областей различают транзисторы n - p - n - и p - n - p -типов (рисунок 6). На практике используются транзисторы обоих типов; принцип действия их одинаков. Основными носителями заряда в транзисторе n - p - n -типа являются электроны, а в p - n - p -транзисторе — дырки. Так как в кремнии электроны обладают большей подвижностью, чем дырки, то чаще используют транзисторы n - p - n -типа.

Принцип работы биполярного транзистора заключается в следующем: между эмиттером и коллектором течёт сильный ток (ток коллектора), а между эмиттером и базой — слабый управляющий ток (ток базы). Ток коллектора будет меняться в зависимости от изменения тока базы.

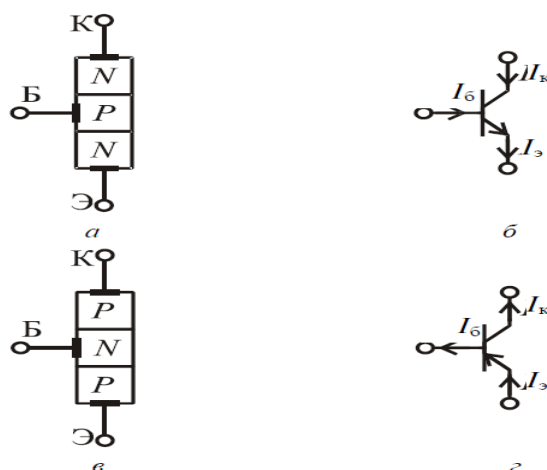


Рис. 6:

*а, б — структура и условное графическое обозначение n–p–n транзистора;
в, г — структура и условное графическое обозначение p–n–p транзистора.*

Рассмотрим p – n переходы транзистора. Их два: эмиттер-база (ЭБ) и база-коллектор (БК). В активном режиме работы транзистора первый из них подключается с прямым, а второй — с обратным смещениями. Для большей определённости будем рассматривать n – p – n транзистор (рисунок 7). Для p – n – p всё аналогично, только слово «электроны» нужно заменить на «дырки». Поскольку переход ЭБ открыт, то электроны легко «перебегают» в базу. Там они частично рекомбинируют с дырками, но большая их часть из-за малой толщины базы и её слабой легированности успевает добежать до перехода база-коллектор, который, как мы помним, включён с обратным смещением. А поскольку в базе электроны — неосновные носители заряда, то электрическое поле перехода помогает им преодолеть его. Таким образом, ток коллектора получается лишь немного меньше тока эмиттера.

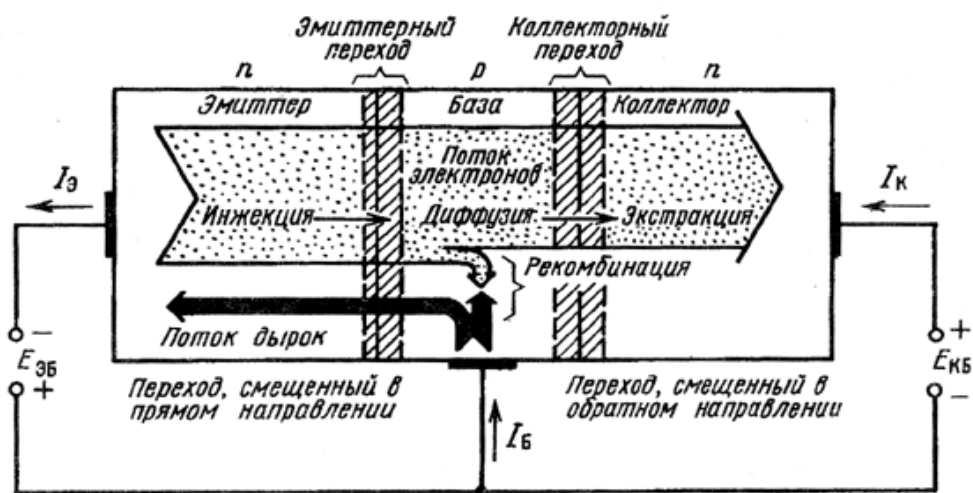


Рис. 7: принцип работы биполярного транзистора.

Если увеличить ток базы, то переход ЭБ откроется сильнее, и между эмиттером и коллектором сможет проскочить больше электронов. А поскольку ток коллектора изначально больше тока базы, то это изменение будет весьма и весьма заметно. Таким образом, произойдёт усиление слабого сигнала, поступившего на базу. Ещё

раз: сильное изменение тока коллектора является пропорциональным отражением слабого изменения тока базы.

Помимо рассмотренных процессов на $p-n$ переходах транзистора может происходить ещё ряд явлений. Например, при сильном увеличении напряжения на переходе база-коллектор может начаться лавинное размножение заряда из-за ударной ионизации. А вкупе с туннельным эффектом это даст сначала электрический, а затем (с возрастанием тока) и тепловой пробой. Однако тепловой пробой в транзисторе может наступить и без электрического (т.е. без повышения коллекторного напряжения до пробивного). Для этого будет достаточно одного чрезмерного тока через коллектор.

Ещё одно явление связано с тем, что при изменении напряжений на коллекторном и эмиттерном переходах меняется их толщина. И если база слишком тонкая, то может возникнуть эффект смыкания (так называемый «прокол» базы) — соединение коллекторного перехода с эмиттерным. При этом область базы исчезает, и транзистор перестаёт нормально работать. Коллекторный ток транзистора в нормальном активном режиме работы транзистора больше тока базы в определённое число раз.

Вторым немаловажным параметром является входное сопротивление транзистора. Согласно закону Ома, оно представляет собой отношение напряжения между базой и эмиттером к управляющему току базы. Чем оно больше, тем меньше ток базы и тем выше коэффициент усиления.

Третий параметр биполярного транзистора — коэффициент усиления по напряжению. Он равен отношению амплитудных или действующих значений выходного (эмиттер-коллектор) и входного (база-эмиттер) переменных напряжений. Поскольку первая величина обычно очень большая (единицы и десятки вольт), а вторая — очень маленькая (десятые доли вольт), то этот коэффициент может достигать десятков тысяч единиц. Стоит отметить, что каждый управляющий сигнал базы имеет свой коэффициент усиления по напряжению.

4. Основы Транзисторно-Транзисторной Логики (ТТЛ).

ТТЛ — разновидность цифровых логических микросхем, построенных на основе биполярных транзисторов и резисторов. Название «транзисторно-транзисторный» возникло из-за того, что транзисторы используются как для выполнения логических функций (НЕ, И, ИЛИ), так и для усиления выходного сигнала.

ТТЛ получила широкое распространение в компьютерах, электронных музыкальных инструментах, а также в контрольно-измерительной аппаратуре и автоматике. Благодаря широкому распространению ТТЛ входные и выходные цепи электронного оборудования часто выполняются совместимыми по электрическим характеристикам с ТТЛ. Максимальное напряжение в схемах с ТТЛ может достигать 24В, однако это приводит к большому уровню паразитного сигнала. Достаточно малый уровень паразитного сигнала при сохранении достаточной эффективности достигается при напряжении 5В, поэтому данная цифра и вошла в технический регламент ТТЛ.

Важность ТТЛ заключается в том, что ТТЛ-микросхемы оказались более пригодны для массового производства и при этом превосходили по параметрам ранее выпускавшиеся серии микросхем.

Рассмотрим примеры реализации логических операций с использованием биполярных транзисторов.

Простейшим логическим элементом является инвертор, который просто изменяет входной сигнал на прямо противоположное значение (НЕ) (рисунок 8).

In	Out
0	1
1	0

Рис. 8: таблица истинности логического элемента инвертора.

В качестве логического инвертора можно использовать простейший усилитель с транзистором, включённом по схеме с общим эмиттером. Принципиальная схема логического элемента инвертора, выполненная на биполярном $n-p-n$ -транзисторе, приведена на рисунке 9.

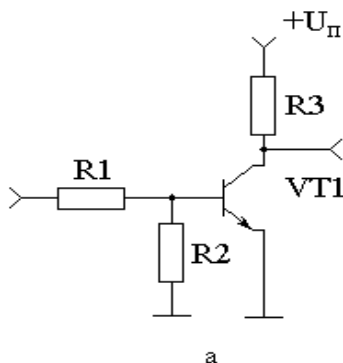


Рис. 9: схема простейшего логического инвертора.

Микросхемы логических инверторов могут обладать различным временем распространения сигнала и могут работать на различные виды нагрузки. Они могут быть выполнены на одном или на нескольких транзисторах.

Для того чтобы особенности включения транзисторов не затеняли выполняемую функцию, были введены специальные обозначения для логических элементов — условно-графические обозначения. Условно-графическое обозначение инвертора приведено на рисунке 10.

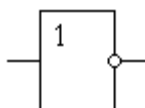


Рис. 10: условно-графическое обозначение логического инвертора.

Инверторы присутствуют практически во всех сериях цифровых микросхем. В отечественных микросхемах инверторы обозначаются буквами ЛН. Например, в микросхеме 1533ЛН1 содержится 6 инверторов. В иностранных микросхемах для

обозначения типа микросхемы используется цифровое обозначение. В качестве примера микросхемы, содержащей инверторы, можно назвать 74ALS04. В названии микросхемы отражается, что она совместима с ТТЛ микросхемами (74), произведена по улучшенной малопотребляющей Шоттки-технологии (ALS), содержит инверторы (04).

Следующим простейшим логическим элементом является схема, реализующая операцию логического умножения «И»:

$$F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2,$$

где символ $\wedge$ и обозначает функцию логического умножения. Иногда эта же функция записывается в другом виде:

$$F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = x_1 \cdot x_2 = x_1 \& x_2.$$

То же самое действие можно записать при помощи таблицы истинности, приведённой на рисунке 11. В формуле, приведённой выше, использовано два аргумента. Поэтому логический элемент, выполняющий эту функцию, имеет два входа. Он обозначается «2И». Для логического элемента «2И» таблица истинности будет состоять из четырёх строк ($2^2=4$).

In1	In2	Out
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Рис. 11: таблица истинности логического элемента «2И».

Как видно из приведённой таблицы истинности, активный сигнал на выходе этого логического элемента появляется только тогда, когда и на входе X , и на входе Y будут присутствовать единицы. То есть этот логический элемент действительно реализует операцию «И».

Проще всего понять, как работает логический элемент «2И», при помощи схемы, построенной на транзисторах, как это показано на рисунке 12. В приведённой принципиальной схеме ток будет протекать только тогда, когда оба транзистора будут открыты, то есть будет присутствовать ток базы, а, значит, единичный уровень на её выходе появится только при двух единицах на входе.

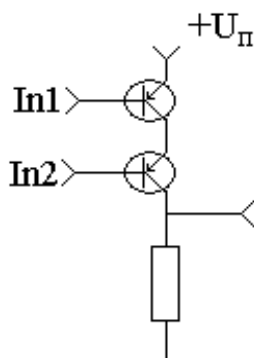


Рис. 12: принципиальная схема логического элемента «И».

Условно-графическое изображение схемы, выполняющей логическую функцию «2И» на принципиальных схемах, приведено на рисунке 13, и с этого момента схемы, выполняющие функцию «И», будут приводиться именно в таком виде. Это изображение не зависит от конкретной принципиальной схемы устройства, реализующей функцию логического умножения.

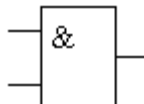


Рис. 13: условно-графическое изображение логического элемента «2И».

Точно также описывается и функция логического умножения трёх переменных:

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3.$$

Её таблица истинности будет содержать уже восемь строк ($2^3 = 8$). Таблица истинности трёхвходовой схемы логического умножения «3И» приведена на рисунке 14, а условно-графическое изображение — на рисунке 15. В схеме же логического элемента «3И», построенной по принципу схемы, придётся добавить третий транзистор.

In1	In2	In3	Out
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Рис. 14: таблица истинности схемы, выполняющей логическую функцию «3И».

Получить подобную таблицу истинности можно при помощи схемы исследования логического элемента «3И», подобной схеме исследования логического инвертора, приведенной на рисунке 15.

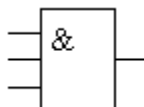


Рис. 15: условно-графическое обозначение схемы, выполняющей логическую функцию «3И».

Следующим простейшим логическим элементом является схема, реализующая операцию логического сложения «ИЛИ»:

$$F(x_1, x_2) = x_1 V x_2,$$

где символ V обозначает функцию логического сложения. Иногда эта же функция записывается в другом виде:

$$F(x_1, x_2) = x_1 V x_2 = x_1 + x_2 = x_1 | x_2.$$

То же самое действие можно записать при помощи таблицы истинности, приведённой на рисунке 16. В формуле, приведённой выше, использовано два аргумента. Поэтому логический элемент, выполняющий эту функцию, имеет два входа. Такой элемент обозначается «2ИЛИ». Для элемента «2ИЛИ» таблица истинности будет состоять из четырёх строк ($2^2 = 4$).

In1	In2	Out
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Рис. 16: таблица истинности логического элемента «2ИЛИ».

Как и в случае, рассмотренном для схемы логического умножения, воспользуемся для реализации схемы «2ИЛИ» транзисторами. На этот раз соединим их параллельно. Схема, реализующая таблицу истинности 16, приведена на рисунке 17. Как видно из приведённой схемы, уровень логической единицы появится на её выходе, как только будет присутствовать ток базы (транзистор открыт) любого из транзисторов.

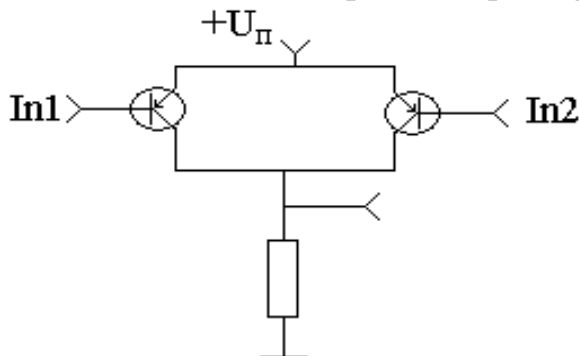


Рис. 17: принципиальная схема логического элемента «2ИЛИ».

Так как функция логического суммирования может быть реализована различными принципиальными схемами, то для обозначения этой функции на принципиальных схемах используется специальный символ «1», как это приведено на рисунке 18.

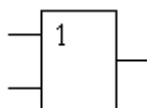


Рис. 18: условно-графическое изображение логического элемента, выполняющего функцию «2ИЛИ».

Представленные логические элементы предназначены для выполнения различных логических операций над дискретными сигналами при двоичном способе их представления. Преимущественное распространение получили логические элементы потенциального типа. В них используются дискретные сигналы, нулевому значению которых соответствует уровень низкого потенциала, а единичному значению — уровень высокого потенциала (отрицательного или положительного). Связь потенциального логического элемента с предыдущим и последующими узлами в системе осуществляется непосредственно, без применения реактивных компонентов. Благодаря этому преимуществу именно потенциальные логические элементы нашли почти исключительное применение в интегральном исполнении в виде микросхем. С позиций использования логических микросхем потенциального типа и проводится далее рассмотрение логических элементов.

Логические биполярные микросхемы чаще выполняют на транзисторах типа $n-p-n$ с напряжением питания $E_k > 0$. Этим объясняется, что используемые здесь сигналы имеют положительную полярность. *Уровню высокого положительного потенциала («1») на выходе соответствует закрытое состояние транзистора, а уровню низкого потенциала («0») — его открытое состояние.* С этой точки зрения, в частности, и следует понимать действие сигнала на входе логического элемента, имеющего непосредственную связь с другими элементами в конкретной схеме. Для упрощения уровень низкого потенциала сигнала полагаем равным нулю, а процесс перехода транзистора из одного состояния в другое — достаточно быстрым.

Логические интегральные микросхемы являются элементами, на основе которых выполняются схемы цифровой техники.

Библиографический список

1. Бабушкина И.А., Бушмелева Н.А., Окулов С.М., Черных С.Ю. Практикум по Турбо Паскалю. Учебное пособие по курсам «Информатика и вычислительная техника», «Основы программирования». — Москва, АБФ, 1998. — 384 с.
2. Пасынков В.В., Чиркип Л.К., Шинков А.Д. Полупроводниковые приборы. — 4-е изд. — М., 1987.
3. Федотов Я.А. Основы физики полупроводниковых приборов. — 2-е изд. — М., 1970.
4. Зи С.М. Физика полупроводниковых приборов, пер. с англ. — М., 1984. — Кн. 1-2.
5. Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Кириллов А.А. Метод координат. — 5-е изд., стереотипное. Серия: Библиотечка физико-математической школы. Математика. Выпуск 1. — М.: Наука, 1973.