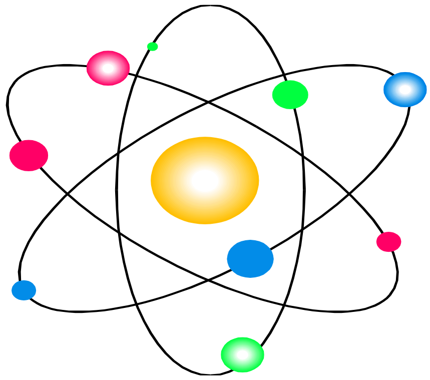
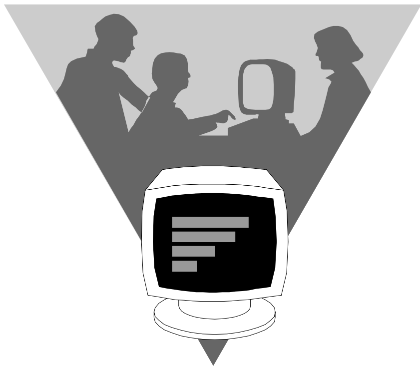
Министерство образования и науки Хабаровского края

Краевое государственное бюджетное образовательное учреждение
дополнительного образования
«Хабаровский краевой центр развития творчества детей и юношества»

Хабаровская краевая заочная физико-математическая школа

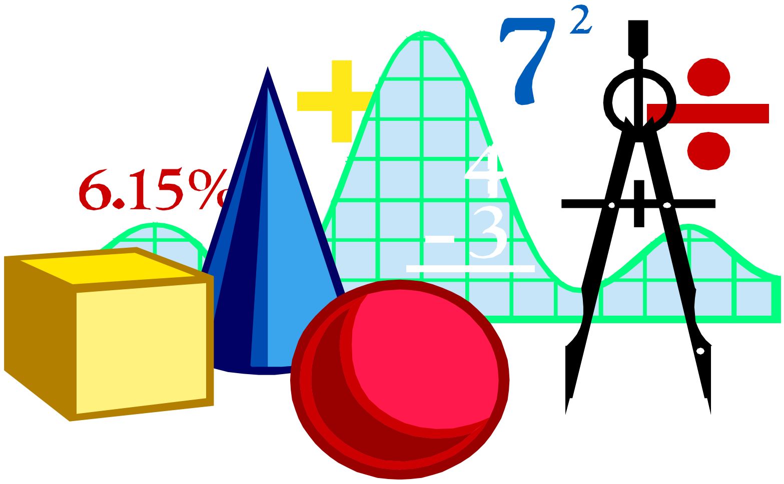




Ю.В. Жулидова, Н.Е. Пишкова, В.В. Мендель

МАТЕМАТИКА: МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧАСТНИКОВ ЛЕТНЕЙ (ОЧНОЙ) СЕССИИ

ВЫПУСК 10



Хабаровск, 2016

МАТЕМАТИКА: методическое пособие для участников летней (очной) сессии / Ю.В. Жулидова, Н.Е. Пишкова, В.В. Мендель. – Хабаровск: КГБОУ ДО ХКЦРТДиЮ, 2016. – 39 с.

Публикуемые в настоящем сборнике методические материалы разработаны для реализации программы летней (очной) сессии Хабаровской краевой заочной физико-математической школы.

Ю.В. Жулидова, Н.Е. Пишкова, В.В. Мендель

Математика: методическое пособие для участников летней (очной) сессии

ВЫПУСК 10

Методическое пособие по математике для учащихся и преподавателей

Подписано к печати 28.07.2016 г. Формат 60x84 1/16.
Тираж 65 экз.

КГБОУ ДО ХКЦРТДиЮ
680000, г. Хабаровск, ул. Комсомольская, 87

СОДЕРЖАНИЕ

Жулидова Ю.В., заместитель декана ИМФиИТ,
старший преподаватель кафедры математики и ИТ
ПИ ФГБОУ ВО ТОГУ

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

1. Линейная и квадратичная функции: свойства и графики

Функция – одно из основных математических и общенаучных понятий. Оно сыграло и поныне играет большую роль в познании реального мира. Путь к появлению понятия функции заложили в XVII веке французские ученые Франсуа Виет и Рене Декарт: они разработали единую буквенную математическую символику, которая вскоре получила всеобщее признание.

1.1. Линейная функция: свойства и графики

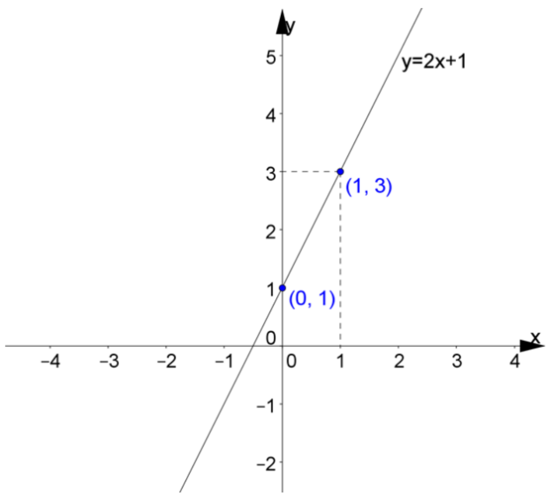
Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$, заданная на множестве всех действительных чисел. Здесь k – угловой коэффициент (действительное число), b – свободный член (действительное число), x – независимая переменная.

В частном случае, если:

- $k = 0$, то получим постоянную функцию $y = b$, график которой есть прямая, параллельная оси Ox, проходящая через точку с координатами $(0; b)$;
- $b = 0$, то получим функцию $y = kx$, которая является прямой пропорциональностью.

Графиком линейной функции является прямая. Для построения прямой достаточно знать две точки (то есть, если известны две точки, принадлежащие прямой, этого достаточно, чтобы ее начертить).

Предположим, у нас есть линейная функция $y = 2x + 1$. Чтобы построить ее график, нужно вычислить координаты любых двух точек. То есть нужно взять любые два значения аргумента x и вычислить соответствующие два значения функции. Затем для каждой пары $(x; y)$ найти точку в системе координат и провести прямую через эти две точки.

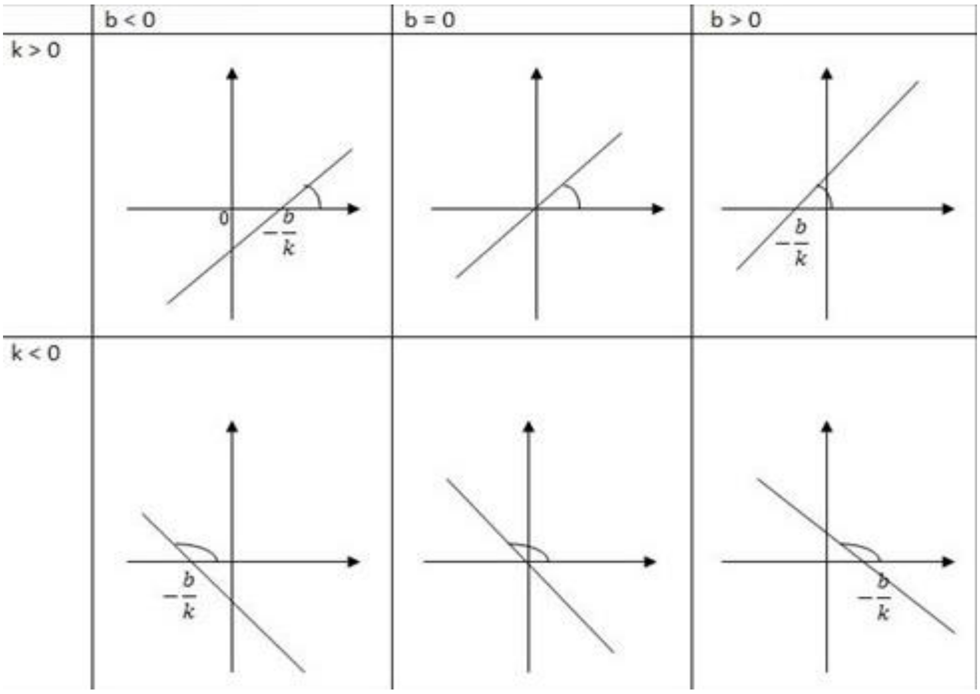


Проще всего найти функцию, если аргумент $x = 0$, т.е. $y(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$. Итак, первая точка имеет координаты $(0;1)$.

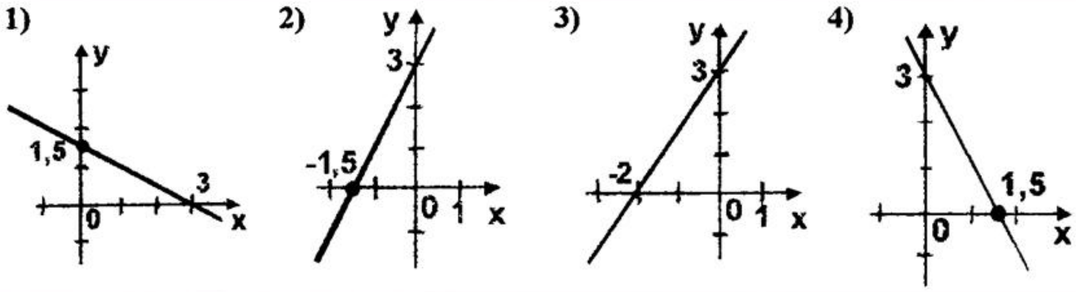
Теперь возьмем любое другое число в качестве x, например, $x=1$: $y(1)=2\cdot1+1=3$. Вторая точка имеет координаты $(1;3)$.

Ставим эти две точки на координатной плоскости и проводим прямую.

Положение прямой на координатной плоскости зависит от значений коэффициентов k и b. Ниже приведена таблица, которая наглядно это иллюстрирует.



Пример 1. Дана функция $y=-2x+3$. Какой из приведенных ниже графиков является графиком этой функции?



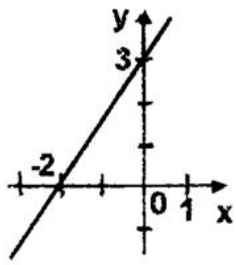
Решение.

Из уравнения функции определяем, что $k=-2$ и $b=3$.

Из условия, что $k=-2<0$ следует, что угол между графиком функции и ось Ox является тупым. Под такое условие подходят графики № 1 и № 4.

Из условия $b=3$ следует, что график проходит через точку с координатами $(0;3)$, а это соответствует графику № 4.

Пример 2. Зная график функции, составьте ее уравнение.



Решение.

Из рисунка сразу можно определить, что $b=3$, т.к. график пересекает ось Oy в точке $y=3$. Значит уравнение прямой можно уже записать в виде $y = kx + 3$.

Для определения коэффициента k возьмем точку, например $(-2;0)$, и подставим ее в полученное уравнение:

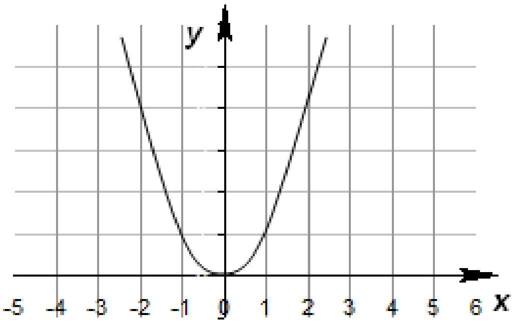
$0 = k \cdot (-2) + 3$, откуда $k = -3/2$. Окончательно получаем уравнение прямой: $y = -3/2x + 3$.

1.2. Квадратичная функция: свойства и графики

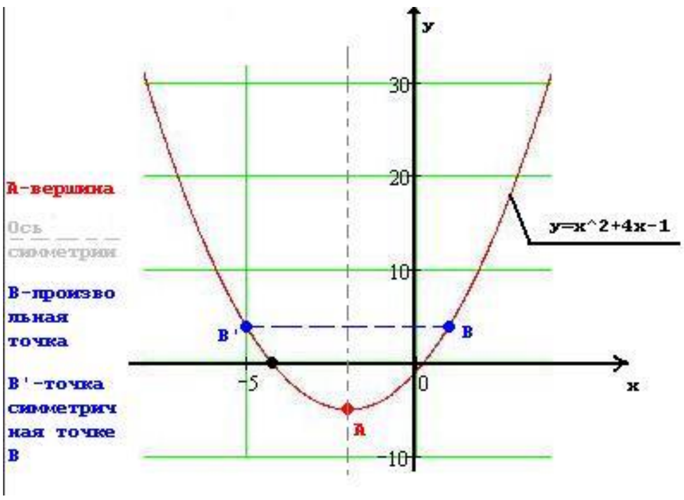
Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – некоторые вещественные числа, причем a отлично от ноля, а x, y – переменные, называется ***квадратичной (квадратной) функцией***.

Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является линия, называемая в математике ***параболой***.

Парабола имеет:



- *Вершину*. Вершиной параболы называется точка $\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$.
- *Ось симметрии*. Проведенная через вершину и параллельная оси Оу ось параболы делит ее на две симметричные части.
- *Ветви*. При а < 0 ветви параболы направлены вниз, при а > 0 – вверх.



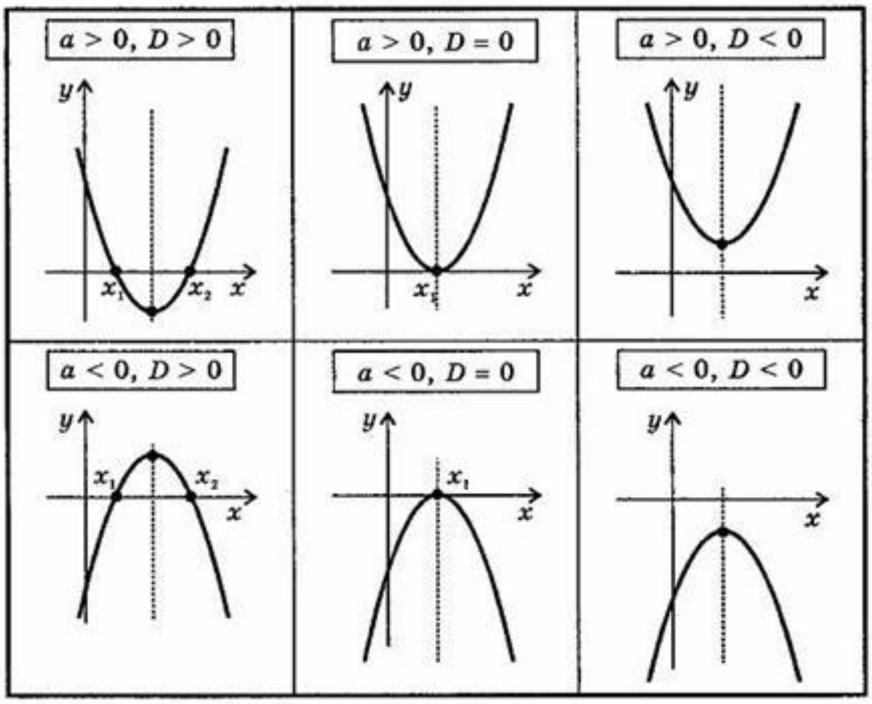
Для построения графика квадратичной функции достаточно знать три точки, одна из которых является вершиной, а две другие – любые произвольные точки, причем чаще всего берутся точки, лежащие на оси *Ox* и симметричные относительно оси параболы.

Квадратичную функцию всегда можно привести к виду $y = a(x + x_0)^2 + d$, а затем построить параболу с помощью ее геометрических преобразований, причем $x_0 = \frac{b}{2a}$, $d = c - \frac{b^2}{4a}$.

Если существуют действительные корни x_1 и x_2 некоторого квадратного уравнения, соответствующий трехчлен можно разложить на линейные множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Корни, если они существуют, можно найти через дискриминант $D = b^2 - 4ac$ следующим образом:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Вид графика квадратичной функции определяется в основном значениями коэффициента a и дискриминанта:



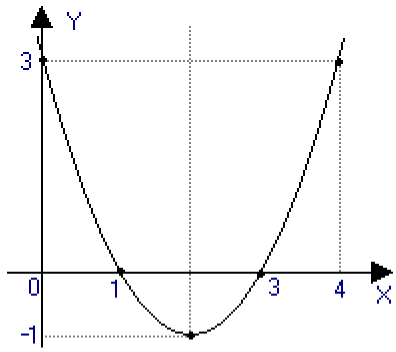
Пример 3. Преобразовать функцию $y = -2x^2 + 10x - 13$.

Решение.

$$-2x^2 + 10x - 13 = -2\left(x^2 - 5x + \frac{13}{2}\right) = -2\left(x^2 - 2\cdot\frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{13}{2}\right) =$$

$$= -2\left(\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{26}{4}\right) = -2\left(\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right) = -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}.$$

Пример 4. Постройте график квадратичной функции $y = x^2 - 4x + 3$ по направлению ветвей, характерным точкам и оси симметрии параболы.



Решение.

1. Ветви направлены вверх, т.к. $a = 1 > 0$
2. Координаты вершины $(2;-1)$, т.к.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot 1} = 2$$

$$y_0 = 2^2 - 4\cdot 2 + 3 = -1$$

3. Ось симметрии параболы: $x = 2$

4. Координаты точек пересечения с осью х:

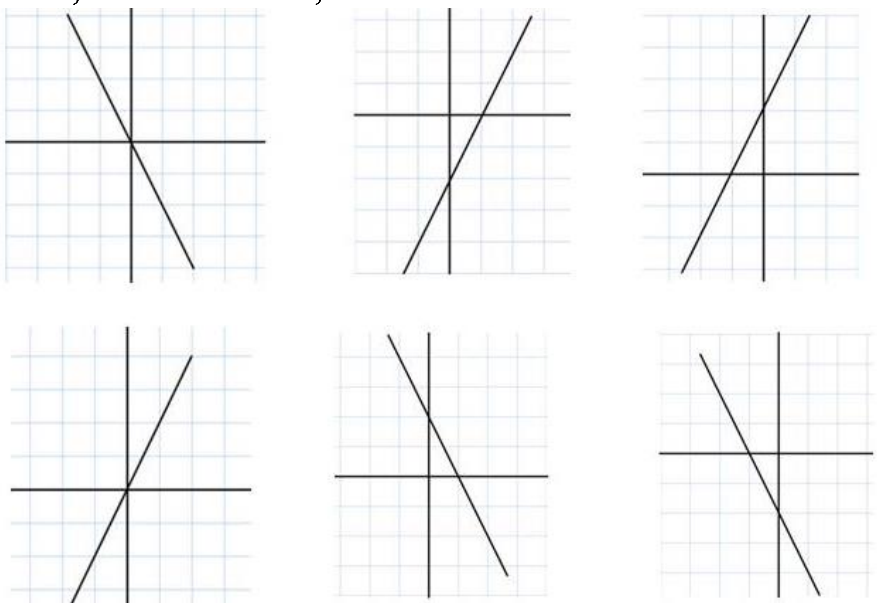
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \text{ или } (3;0) \text{ и } (1;0).$$

Задания для самостоятельной работы

1. Определить взаимосвязь коэффициентов и расположения прямых:

$y = -x$	$y = 2x - 3$	$y = -x + 4$
$y = x + 3$	$y = x$	$y = -5$

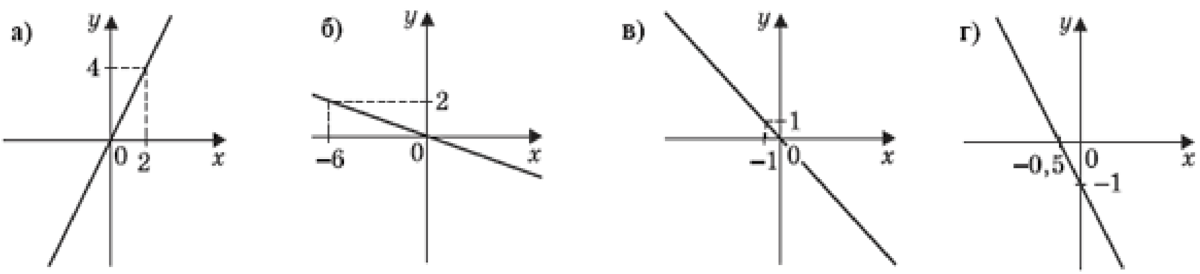
2. На каком рисунке коэффициенты $k > 0$; $k < 0$; $b > 0$; $b < 0$; $k > 0$ и $b > 0$; $k > 0$ и $b < 0$; $k < 0$ и $b > 0$; $k < 0$ и $b < 0$?



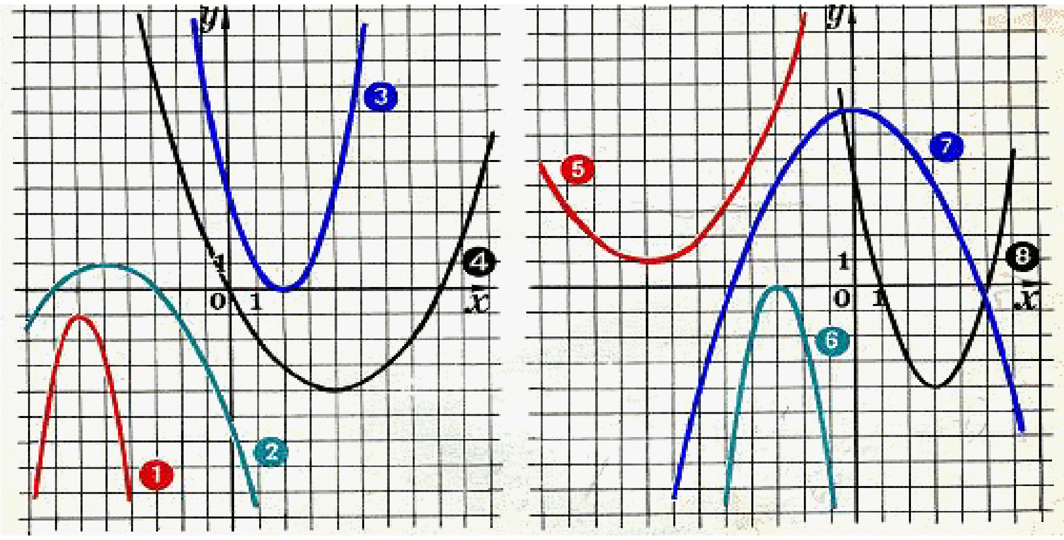
3. Составьте уравнение линейной функции по следующим условиям:

$(0;-1)$; I, III четверть; $k = 3$	$(0;1)$; II, IV четверть; $k = -0{,}5$
$(0;-1)$; II, IV четверть; $k = -3$	$(0;2)$; I, III четверть; $k = 2$
$(0;1)$; II, IV четверть; $k = -2$	$(0;-2)$; I, III четверть; $k = 2$

4. Зная координаты одной из точек графика, составьте его уравнение.



5. Назовите число корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, знак коэффициента *a*, а также определите вершину и ось симметрии:



6. Преобразовать функцию:

$y=x^2+4x+3$	$y=2x^2+4x+1$	$y=-x^2-3x+1$
$y=x^2+5x-2$	$y=-2x^2-3x-3$	$y=3x^2+9x-2$
$y=\frac{1}{4}x^2+4x-\frac{1}{4}$	$y=x^2+\frac{4}{3}x-4$	$y=-x^2-4x+\frac{3}{2}$

7. Проверить, проходит ли через заданные точки график квадратичной функции, если да, составить ее уравнение и построить график:

$(0;-1)$, $(0;1)$, $(1;2)$	$(1;3)$, $(-1;3)$, $(0;1)$	$(0;-2)$, $(-1;-1)$, $(3;1)$
$(-5;2)$, $(-2;-2)$, $(0;0)$	$(1;1)$, $(2;2)$, $(4;-2)$	$(-1;-1)$, $(1;1)$, $(2;8)$

В настоящее время графики имеют достаточно широкое применение: часто применяются в естествознании и технике, например при использовании самопишущих приборов, автоматически записывающих изменение одной величины в зависимости от изменения другой (ЭКГ).

Графический способ задания функции имеет неоспоримое преимущество перед остальными способами задания функции – наглядность. По графику функции можно многое узнать о «поведении» этой функции, например монотонность, множество значений и область определения функции.

Пусть заданы прямоугольная система координат Oxy и функция $y=f(x)$. ***Графиком функции*** $f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x;f(x))$, где $x\in D(f)$.

Для построения графиков функций используют следующие приемы:

- построение по точкам;
- преобразование графика (сдвиг, растяжение и сжатие по осям);
- действия с графиками (сложение, умножение).

2. Построение графиков функций с помощью

элементарных преобразований

График функции $y=f(x)$ зачастую можно построить с помощью преобразований графика некоторой, уже известной функции.

В частности:

1. Параллельный перенос:

a. график функции $y=f(x)+a$ получается из графика функции $y=f(x)$ сдвигом вдоль оси *Oy* на $|a|$ единиц (вверх, если $a>0$, и вниз, если $a<0$);

b. график функции $y=f(x-a)$ получается из графика функции $y=f(x)$ сдвигом вдоль оси *Ox* на $|a|$ единиц (вправо, если $a>0$, и влево, если $a<0$);

2. Сжатие и растяжение:

a. график функции $y=kf(x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ растяжение (сжатием) вдоль оси *Oy* в *k* раз ($1/k$ раз), если $k>1$ ($0<k<1$);

b. график функции $y=f(kx)$ получается из графика функции $y=f(x)$ сжатием (растяжение) вдоль оси *Ox* в *k* раз ($1/k$ раз), если $k>1$ ($0<k<1$);

3. Осевая симметрия:

a. график функции $y=-f(x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ симметричным отображением относительно оси *Ox*;

b. график функции $y=f-(x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ симметричным отображением относительно оси *Oy*;

4. Преобразования, содержащие знак абсолютной величины:

a. график функции $y=f(|x|)$ получается из графика функции $y=f(x)$ следующим образом: совпадает с графиком $y=f(x)$ для $x\geq 0$ и является его симметричным отображением относительно оси *Oy* для $x<0$;

b. график функции $y=|f(x)|$ получается из графика функции $y=f(x)$ следующим образом: совпадает с графиком $y=f(x)$, если $f(x)\geq 0$, и является его симметричным отображением относительно оси *Ox* для $f(x)<0$;

c. график функции $|y|=f(x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ следующим образом: совпадает с графиком $y=f(x)$, если $f(x)\geq 0$, и является его симметричным отображением относительно оси *Ox* для $f(x)\geq 0$.

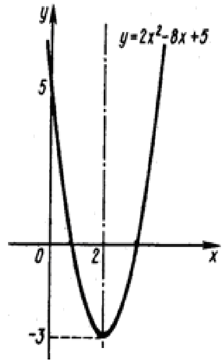
Чтобы построить график заданной аналитически функции, можно:

1. путем преобразований выделить в данном выражении одну или несколько основных элементарных функций;

2. определить последовательность элементарных операций, с помощью которых из них получена данная функция;

3. построить график основной функции и путем преобразования построенного графика получить график данной функции.

Рассмотрим примеры построения графиков функций с помощью элементарных преобразований.



Пример 1. Построить график функции $y = 2x^2 - 8x + 5$.

Решение. Преобразуем квадратный трехчлен, выделив полный квадрат:

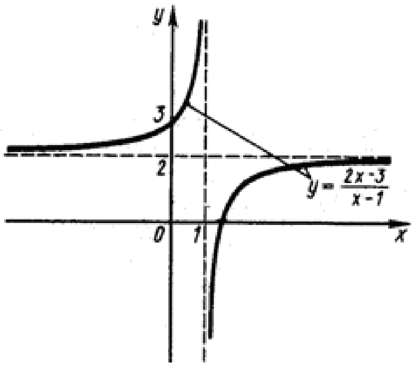
$$2x^2 - 8x + 5 = 2\left(x^2 - 4x + \frac{5}{2}\right) = 2(x-2)^2 - 3.$$

Итак, нам нужно построить график функции $y = 2(x-2)^2 - 3$.

Из полученного выражения можно выделить элементарную функцию и следующую последовательность преобразований:

1. сдвигаем на 2 единицы вправо, т.е. $y = (x-2)^2$,
2. растягиваем вдоль оси *Oy* в 2 раза, т.е. $y = 2(x-2)^2$,
3. сдвигаем на 3 единицы вниз, т.е. $y = 2(x-2)^2 - 3$.

Пример 2. Построить график функции $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$.



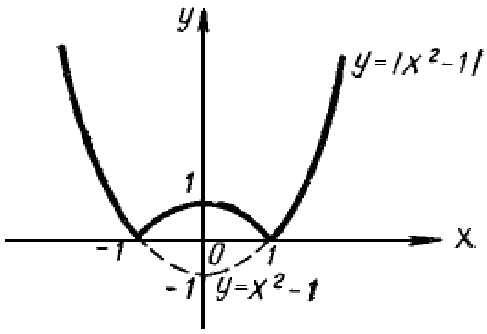
Решение. Выполним преобразования, выделив целую часть алгебраической дроби: $\dfrac{2x-3}{x-1} = \dfrac{2(x-1)-1}{x-1} = 2 - \dfrac{1}{x-1}$.

Таким образом, из элементарной функции $y = \dfrac{1}{x}$ нужно построить график функции $y = -\dfrac{1}{x-1} + 2$, для этого:

1. строим график функции $y = -\dfrac{1}{x}$ с помощью осевой симметрии относительно оси *Ox*,
2. сдвигом графика функции на единицу вправо, получаем график функции $y = -\dfrac{1}{x-1}$,
3. для построения графика функции $y = -\dfrac{1}{x-1} + 2$ сдвигаем полученный график на 2 единицы вверх.

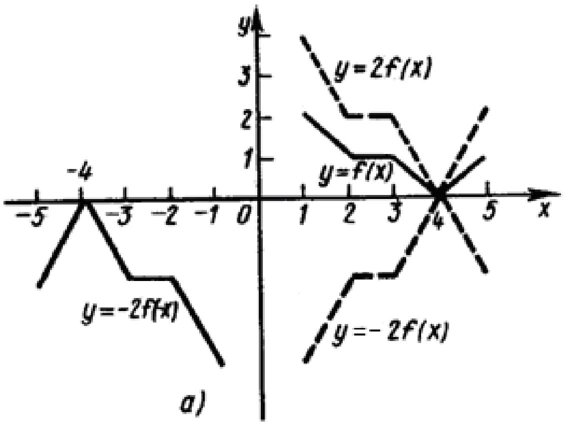
Пример 3. Построить график функции $y = |x^2 - 1|$.

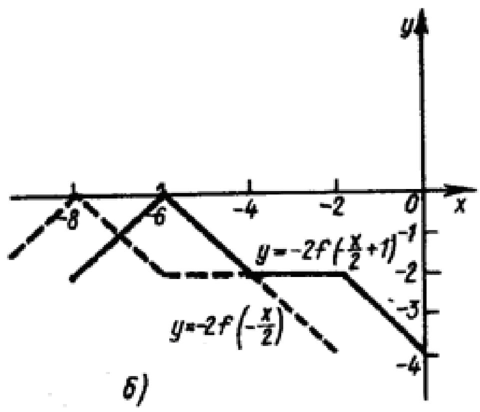
Решение. Строим график функции $y = |x^2 - 1|$, сдвигая на одно деление масштаба вниз параболу $y = x^2 - 1$. Затем строим на интервале *(—1; +1)* изображение, симметричное графику $y = |x^2 - 1|$ относительно оси абсцисс, а остальную часть графика оставляем неизменной.



Пример 4. Построить график функции $y = -2f\left(1 - \frac{x}{2}\right)$, если дан график функции $y = f(x)$ (рис. а).

Решение. Последовательно строим сначала графики функций $y = 2f(x)$, $y = -2f(x)$, $y = -2f(-x)$ (рис. а), а затем графики функций $y = -2f\left(\frac{x}{2}\right)$ и $y = -2f\left(-\frac{x}{2}\right)$, $-2f\left(-\frac{x}{2} + 1\right)$ (рис. б).





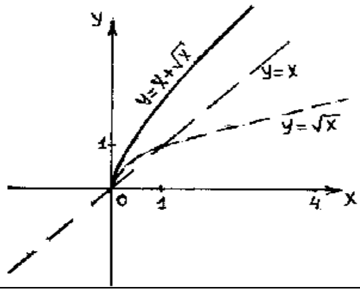
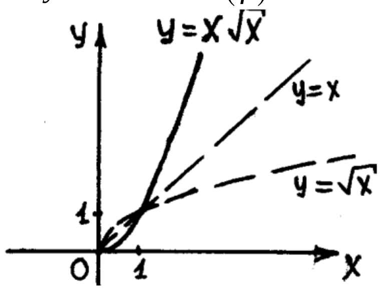
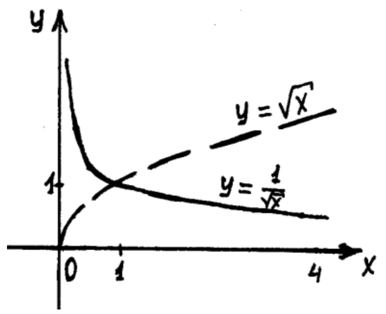
3. Построение графиков функций с помощью арифметических действий

Ранее было указано, что элементарные функции строятся из основных элементарных функций при помощи конечного числа арифметических действий. Графики основных элементарных функций известны. Поэтому построить графики сложных функций можно путем выполнения указанных операций над графиками основных элементарных функций (понимая под этим выполнение указанных алгебраических операций над соответствующими координатами).

С этой точки зрения, например, построение графика функции $y = ax^2$ можно рассматривать как умножение графиков $y_1 = x^2$ и $y_2 = a$, а построение графика квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ – как сложение графиков (параболы $y_1 = ax^2$ и прямой $y_2 = bx + c$ *****).

Применение такого способа целесообразно, например, когда слагаемые являются основными элементарными функциями разных типов.

Алгоритм построения графиков функций с помощью арифметических действий оформим в виде таблицы:

Функция	**Алгоритм построения**	**Пример построения**
1. $y = f(x) \pm g(x)$	Построить график функции $y = f(x)$ Построить график функции $y = g(x)$ Сложить (вычесть) ординаты соответствующих точек для любого $x \in D(f)$	$y = x + \sqrt{x}$ $D(f): x \geq 0$ 
2. $y = f(x) \cdot g(x)$	Построить график функции $y = f(x)$ Построить график функции $y = g(x)$ Умножить ординаты соответствующих точек для любого $x \in D(f)$, при этом $f(x) \cdot g(x)$ обращается в ноль, если хотя бы одна из функций $f(x)$, $g(x)$ обращается в ноль в данной точке	$y = x \cdot \sqrt{x}$ $D(f): x \geq 0$ 
3. $y = \dfrac{1}{f(x)}$	Строим график функции $y = f(x)$ Точки $f(x) = 1$ и $f(x) = -1$ не изменяем. Через точки $f(x) = 0$ проводим асимптоты. На участках между асимптотами строим функцию $f(x) > 0$ $y = \dfrac{1}{f(x)} > 0$ $f(x) < 0$ $y = \dfrac{1}{f(x)} < 0$ а) при $f(x) \to 0$ $\dfrac{1}{f(x)} \to \pm\infty$ б) при $f(x) \to \infty$ $\dfrac{1}{f(x)} \to 0$	$y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $D(f): x > 0$ 

Задания для самостоятельной работы

1. Построить графики функций:

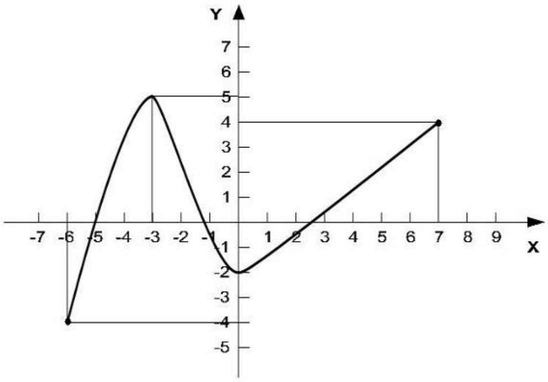
$y = x^3 - \dfrac{2}{3}$	$y = \dfrac{1}{2}x^2$	$y = \dfrac{1}{x} + 4$
$y = 2\lvert x\rvert$	$y = -\sqrt{x}$	$y = \lvert x^3\rvert$
$y = (x-2)^2$	$\lvert y\rvert = x$	$y = \sqrt{x+4}$

2. Для заданных функций определить последовательность элементарных преобразований и построить графики:

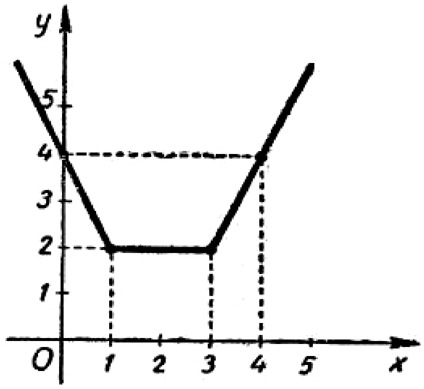
$y = \sqrt{5-x} + 2$	$y = -3\lvert x-2\rvert$	$y = x^2 - 8x + 20$
$y = 2x^2 - 5x + 2$	$y = x^2 - 5\lvert x\rvert + 1$	$\lvert y\rvert = 1 - x$
$y = \sqrt{4 - \lvert x\rvert} - 1$	$y = \lvert\lvert x-2\rvert - 3\rvert$	$y = \dfrac{2x+3}{x-2}$
$y = \dfrac{x+4}{x+2}$	$y = \lvert\lvert x^3 - 1\rvert - 2\rvert$	$y = 1 - \dfrac{2}{x}$
$y = \lvert\sqrt{x+3} - 2\rvert$	$y = \lvert x^2 + 3x\rvert - 3$	$y = \dfrac{\lvert x\rvert - 2}{\lvert x\rvert + 1}$
$y = \dfrac{2-x}{x+3}$	$y = -\dfrac{2}{3}\sqrt{x+1} + \dfrac{1}{2}$	$y = -2x^2 - 2x - 2$

3. Для функций, изображенных на рисунках, провести соответствующие преобразования:

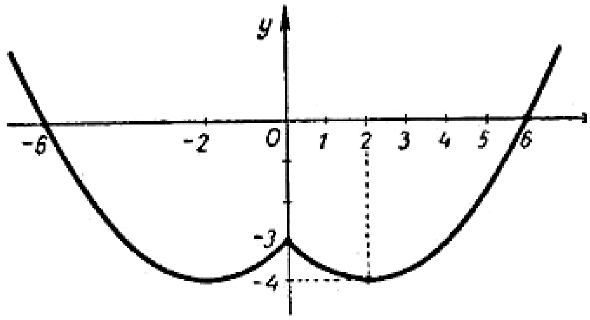
$$y = \lvert f(1-x)\rvert + 1$$



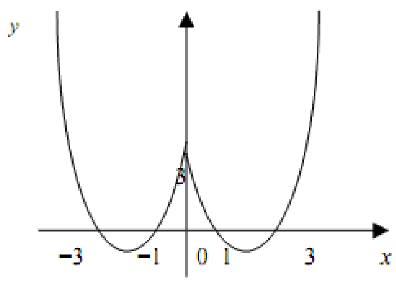
$$y = -f(x+2) + 3$$



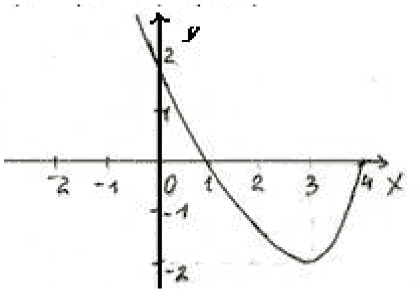
$$y = f(2x-3) - 1$$



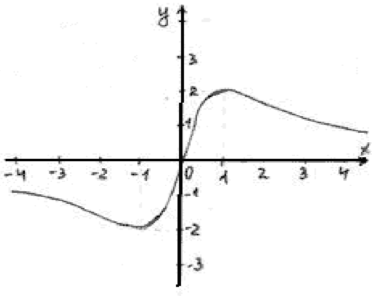
$$y = -\frac{1}{2} f\left(\left|\frac{x}{2}\right|\right)$$



$y = f(|x-2|) - 2$



$|y| = -2f(3x+1)$



4. С помощью арифметических действий построить графики заданных функций:

$y = \sqrt{x} + x^2$ $\quad y = x - x^2$ $\quad y = x^2\sqrt{x}$

$y = x + \frac{1}{x}$ $\quad y = x^2 + \frac{1}{|x|}$ $\quad y = \frac{1}{x^2+1}$

$y = x^3\sqrt{x}$ $\quad y = x|x|$ $\quad y = x^3 + x$

5. Решить графически уравнения:

$|x-3| - x - 1 = 0$ $\quad x^2 = (1-x)^3$ $\quad |x+3| = |x-5|$ $\quad x^3 + 2x - 4 = 0$

Пишкова Н.Е., старший преподаватель кафедры математики и ИТ
ПИ ФГБОУ ВО ТОГУ

МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ

1. Основные понятия

1. Уравнение $f(x;a)=0$ (неравенство $f(x;a)\vee 0$) называется ***уравнением (неравенством) с параметром а и переменной х***, если ставится задача для каждого действительного числа *а*, решить это уравнение (неравенство) относительно *х*.

2. ***Решить уравнение (неравенство) с параметром а*** – это значит для каждого действительного значения *а* найти значения *х*, удовлетворяющие этому уравнению (неравенству), или установить, что таких значений нет.

3. Значения параметра *а*, при которых уравнение $f(x;a)=0$ (неравенство $f(x;a)\vee 0$) качественно изменяется (меняется вид записи или изменяется количество корней) называются ***контрольными значениями.***

Примечания:

1. Уравнение (неравенство) может быть и с несколькими параметрами, тогда не только для любого действительного значения каждого параметра необходимо найти *х*, но и установить взаимосвязь между параметрами.

2. Общих способов нахождения контрольных значений параметров и решения уравнений и неравенств нет, поэтому на конкретных примерах различных типов и видов уравнений и неравенств рассмотрим теоретические и практические основы уравнений и неравенств с параметрами.

3. Задачи, сводящиеся к решению уравнений (неравенств) с параметрами, могут быть сформулированы по-разному. Самые распространенные формулировки:

- решить уравнение (неравенство) при всех *а*;
- установить количество корней уравнения (решений неравенства) в зависимости от *а*;
- при каких значениях параметра *а* корни уравнения (решения неравенства) удовлетворяют заданным условиям.

2. Линейные уравнения и неравенства

Пример 1. Решить уравнение $(a+a^2)x=a^2-5a+4$

Решение. 1) Заменим данное уравнение равносильным ему:

$$a(a+1)x=(a+1)(a+4)\ \ldots\ldots\ldots(*)$$

2) Найдем контрольные значения параметра *а*: $a(a+1)=0,\ a_1=0,\ a_2=-1.$

3) Решим уравнение (*) на каждом подмножестве действительных чисел: $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{-1\}$, $A_3 = \{a \neq 0,\ a \neq -1\}$.

а) Пусть *a = 0*, тогда уравнение (*) примет вид $0 \cdot x = 4$. Такое уравнение не имеет корней.

б) Пусть *a = -1*, тогда уравнение (*) примет вид $0 \cdot x = 0$. Корнями такого уравнения являются любые действительные числа.

в) Пусть $a \neq 0,\ a \neq -1$, тогда из уравнения (*) следует $x = \dfrac{a+4}{a}$.

4) Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

если *a = 0*, то уравнение корней не имеет;
если *a = -1*, то $x \in R$;
если $a \neq 0,\ a \neq -1$, то $x = \dfrac{a+4}{a}$.

Пример 2. Решить неравенство $a(a+1)x > (a+1)(a+4)$.

Решение. 1) Найдем контрольные значения *a*: $a_1 = 0$, $a_2 = -1$.

2) Решим данное неравенство на каждом подмножестве множества действительных чисел: $A_1 = (-\infty; -1)$, $A_2 = \{-1\}$, $A_3 = (-1; 0)$, $A_4 = \{0\}$, $A_5 = (0; \infty)$.

а) Пусть *a < -1*, из данного неравенства следует $x > \dfrac{a+4}{a}$.

б) Пусть *a = -1*, тогда данное неравенство примет вид $0 \cdot x > 0$, а такое неравенство не имеет решений.

в) Пусть *–1<a<0*, тогда из данного неравенства следует $x < \dfrac{a+4}{a}$, так как *a(a+1)<0*.

г) Пусть *a = 0*, тогда данное неравенство имеет вид $0 \cdot x > 4$, но такое неравенство не имеет решений.

д) Пусть *a > 0*, тогда из данного неравенства следует $x > \dfrac{a+4}{a}$.

з) Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

если *a < -1* или *a > 0*, то $x > \dfrac{a+4}{a}$;
если *a = 0* или *a = -1*, то неравенство решений не имеет;
если *–1<a<0*, то $x < \dfrac{a+4}{a}$.

3. Уравнения и неравенства, сводящиеся к линейным

Пример 3. Решить уравнение $\dfrac{1}{a} + \dfrac{3a-1}{x+2} = 2$

Решение. 1) Найдем область определения уравнения: $a \neq 0$, $x \neq -2$.

2) Решим данное уравнение относительно *x*, выполнив серию тождественных преобразований:

$$x + 2 + 3a^2 - a = 2ax + 4a \ \Leftrightarrow\ (1-2a)x = 2 + 3a^2 - 5a \Leftrightarrow\ (1-2a)x = 3(a-1)(a-\frac{2}{3})$$

а) если $a=\frac{1}{2}$, то корней нет; б) если $a\neq\frac{1}{2}$, то $x=\frac{3a^2-5a+2}{1-2a}$

3) Найдем те значения *a*, при которых найденный корень принимает значение равное –2, исключенное из области определения уравнения:

$$\frac{3a^2-5a+2}{1-2a}=-2 \quad\Leftrightarrow\quad 3a^2-9a+4=0 \quad\Rightarrow\quad a=\frac{9\pm\sqrt{33}}{6}$$

4) Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

если $a\neq 0$, $a\neq\frac{1}{2}$, $a\neq\frac{9\pm\sqrt{33}}{6}$, то $x=\frac{3a^2-5a+2}{1-2a}$;

если *a = 0* или $a=\frac{1}{2}$, или $a=\frac{9\pm\sqrt{33}}{6}$, уравнение решений не имеет.

Пример 4. Для каждого *a* найдите число корней уравнения $|x-1|=ax+2$.

Решение. 1) Используя определения модуля действительного числа, заменим данное уравнение совокупностью двух смешанных систем и решим их:

а) $\begin{cases} x<1, \\ 1-x=ax+2; \end{cases}$ $\begin{cases} x<1, \\ (a+1)x=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x<1, \\ a\neq-1, \\ x=-\frac{1}{a+1}; \end{cases}$ $\begin{cases} -\frac{1}{a+1}<1, \\ a\neq-1, \\ x=-\frac{1}{a+1}; \end{cases}$ $\begin{cases} -\frac{a+1+1}{a+1}>0, \\ a\neq-1, \\ x=-\frac{1}{a+1}; \end{cases}$

$\begin{cases} -\frac{a+2}{a+1}>0, \\ a\neq-1, \\ x=-\frac{1}{a+1}; \end{cases}$ $\begin{cases} a<-2, a>-1, \\ x=-\frac{1}{a+1}. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x\geq 1, \\ x-1=ax+2; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 1, \\ x(1-a)=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 1, \\ a\neq 1, \\ x=\frac{3}{1-a}; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{3}{1-a}\geq 1, \\ a\neq 1, \\ x=\frac{3}{1-a}; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{3-1+a}{1-a}\geq 0, \\ a\neq 1, \\ x=\frac{3}{1-a}; \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{2+a}{1-a}\geq 0, \\ a\neq 1, \\ x=\frac{3}{1-a}; \end{cases}$ $\begin{cases} -2\leq a<1 \\ x=\frac{3}{1-a}; \end{cases}$

2) Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

если *a* < *-2*, то $x=-\frac{1}{a+1}$; если $-2\leq a<-1$, то $x=\frac{3}{1-a}$;

если $-1<a<1$, то $x_1=-\frac{1}{a+1}$, $x_2=\frac{3}{1-a}$; если $a\geq 1$, то $x=-\frac{1}{a+1}$.

Пример 5. Решить неравенство для каждого действительного *a*

$$\frac{2+3x}{x-a}>0$$

Решение. Так как $x=-\frac{2}{3}$ и $x=a$ – это те значения *x*, при переходе через которые меняется знак или числителя, или знаменателя левой части данного неравенства, то рассмотрим три случая взаимного расположения *a* и $-\frac{2}{3}$ на числовой прямой и для каждого случая найдем решение.

1) Пусть $a>-\frac{2}{3}$, тогда неравенство выполняется при $x>a$ или $x<-\frac{2}{3}$.

2) Пусть $a=-\frac{2}{3}$, тогда неравенство принимает вид $\frac{2+3x}{x+\frac{2}{3}}>0$ или $\frac{3(2+3x)}{3x+2}>0$ и выполняется при всех *x*, отличных от $-\frac{2}{3}$.

3) Пусть $a<-\frac{2}{3}$, тогда неравенство выполняется при $x<a$ или $x>-\frac{2}{3}$.

Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

если $a>-\frac{2}{3}$, то $x>a$ или $x<-\frac{2}{3}$; если $a=-\frac{2}{3}$, то $x\in R$, кроме $x=-\frac{2}{3}$; если $a<-\frac{2}{3}$, то $x<a$ или $x>-\frac{2}{3}$.

4. Квадратные уравнения и неравенства

Пример 6. Решить уравнение $(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$.

Решение. 1) Найдем первое контрольное значение *a*: $a-2=0$, $a_1=2$.

2) Пусть $a=2$, тогда данное уравнение примет вид: $4x+1=0$, т.е. $x=\frac{1}{4}$

3) Пусть $a\neq 2$, результат решения зависит от дискриминанта.

$$D=4a^2-4(2a-3)(a-2)=4a^2-8a^2+28a-24=-4a^2+28a-24=-4(a^2-7a+6).$$

а) $\begin{cases} a\neq 2, \\ -4(a^2-7a+6>0, \\ x=\dfrac{a\pm\sqrt{-a^2+7a-6}}{a-2}; \end{cases}$ $\begin{cases} a\neq 2, \\ 1<a<6, \\ x=\dfrac{a\pm\sqrt{-a^2+7a-6}}{a-2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} a\neq 2, \\ -4(a^2-7a+6=0, \\ x=\dfrac{a}{a-2}; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=6, \\ x=1{,}5; \end{cases} \\ \begin{cases} a=1, \\ x=-1. \end{cases} \end{array}\right.$

в) $\begin{cases} a \neq 2, \\ -4(a^2-7a+6)<0, \\ \text{нет корней} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} a>6 \text{ или } a<1, \\ \text{корней нет} \end{cases}$

4) Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

если $a = 2$, то $x=\frac{1}{4}$; если $1<a<2,\ 2<a<6$, то $x=\frac{a\pm\sqrt{-a^2+7a-6}}{a-2}$;

если $a = 1$, то $x = -1$; если $a = 6$, то $x = 1,5$; если $a>6$ или $a<1$, то корней нет.

Пример 7. При каких b уравнение $bx^2-2x\sqrt{15-b^2}-2=0$ имеет два различных действительных корня.

Решение. 1) Найдем область определения уравнения: $15-b^2\geq 0$ $\Leftrightarrow -\sqrt{15}\leq b\leq\sqrt{15}$.

2) Условие задачи будет выполняться, если

$$\begin{cases} b\neq 0, \\ D>0, \\ |b|\leq\sqrt{15}; \end{cases} \quad \begin{cases} b\neq 0, \\ 15-b^2-2b>0, \\ |b|\leq\sqrt{15}; \end{cases} \quad \begin{cases} b\neq 0, \\ b^2+2b-15<0, \\ |b|\leq\sqrt{15}; \end{cases} \quad \begin{cases} b\neq 0, \\ -3<b<5, \\ |b|\leq\sqrt{15}; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} -3<b<0, \\ 0<b\leq\sqrt{15} \end{array}\right.$$

Ответ: $b\in(-3;0)\cup(0;\sqrt{15}]$

Пример 8. Решить неравенство $ax^2+(2a-1)x+a\leq 0$

Решение. 1) Найдем контрольное значение a: $a = 0$.

2) Пусть $a = 0$, неравенство примет вид $x\leq 0$.

3) Пусть $a>0$, тогда неравенство будет иметь решение только при условии, что дискриминант $D\geq 0$, т.е. $4a^2-4a+1-4a^2\geq 0 \Leftrightarrow -4a+1\geq 0 \Leftrightarrow a\leq\frac{1}{4}$

Учитывая знак a, будем иметь $0<a\leq\frac{1}{4}$, $\quad \frac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{a}\leq x\leq\frac{1-2a+\sqrt{1-4a}}{a}$.

4) Пусть $a<0$, тогда условие $a\leq\frac{1}{4}$ ($D\geq 0$) будет выполнено, и решение исходного неравенства будет иметь вид $x\leq\frac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{a}$ или $x\geq\frac{1-2a+\sqrt{1-4a}}{a}$.

5) Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

если $a<0$, то $x\leq\frac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{a}$ или $x\geq\frac{1-2a+\sqrt{1-4a}}{a}$; если $a = 0$, то $x\leq 0$;

если $0<a\leq\frac{1}{4}$, то $\frac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{a}\leq x\leq\frac{1-2a+\sqrt{1-4a}}{a}$;

если $a>\frac{1}{4}$, то неравенство решений не имеет.

5. Уравнения и неравенства, сводящиеся к квадратным

Пример 9. Решить уравнение: $x\cdot|x-2|-a=0$

Решение. 1) Заменим данное уравнение совокупностью двух систем:

а) $\begin{cases} x \ge 2, \\ x^2 - 2x - a = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 2, \\ x = 1 \pm \sqrt{1+a}; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1+\sqrt{1+a} \ge 2, \\ x = 1+\sqrt{1+a}; \end{cases} \\ \begin{cases} 1-\sqrt{1+a} \ge 2, \\ x = 1-\sqrt{1+a}; \end{cases} \end{array} \right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \ge 0, \\ x = 1+\sqrt{1+a}; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{1+a} \le -1, \\ x = 1-\sqrt{1+a}; \end{cases} \end{array} \right.$ $\begin{cases} a \ge 0, \\ x = 1+\sqrt{1+a} \end{cases}$

б) $\begin{cases} x < 2, \\ -x^2 + 2x - a = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 2, \\ x = 1 \pm \sqrt{1-a}; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1+\sqrt{1-a} < 2, \\ x = 1+\sqrt{1-a}; \end{cases} \\ \begin{cases} 1-\sqrt{1-a} < 2, \\ x = 1-\sqrt{1-a}; \end{cases} \end{array} \right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 \le 1-a < 1, \\ x = 1+\sqrt{1-a}; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{1-a} > -1, \\ x = 1-\sqrt{1-a}; \end{cases} \end{array} \right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a \le 1, \\ x = 1+\sqrt{1-a}; \end{cases} \\ \begin{cases} a \le 1, \\ x = 1-\sqrt{1-a}; \end{cases} \end{array} \right.$

Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

Ответ: если $a < 0$, то $x = 1-\sqrt{1-a}$; если $0 \le a \le 1$, то $x = 1 \pm \sqrt{1-a}$, $x = 1+\sqrt{1+a}$;
если $a > 1$, то $x = 1+\sqrt{1+a}$.

Пример 10. Решить уравнение $\dfrac{x^2 - ax - a - 1}{x^2 - (3-2a)x - 6a} = 0$.

Решение. 1) Заменим данное уравнение равносильной ему системой:

$$\begin{cases} x^2 - ax - a - 1 = 0, \\ x^2 - (3-2a)x - 6a \ne 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем: $x_1 = a+1$, $x_2 = -1$; из второго неравенства получаем: $x \ne 3$, $x \ne 2a$.

2) Решим смешанную систему для каждого из возможных случаев:

а) $\begin{cases} x = a+1, \\ a+1 \ne 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x = a+1, \\ a \ne 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = a+1, \\ a+1 \ne -2a; \end{cases}$ $\begin{cases} x = a+1, \\ a \ne -\dfrac{1}{3}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = -1, \\ -1 \ne -2a; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1, \\ a \ne \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

3) Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

если $a \ne 2$, $a \ne -\dfrac{1}{3}$, $a \ne \dfrac{1}{2}$, то $x_1 = a+1$, $x_2 = -1$;

если $a = 2$, то $x = -1$; если $a = -\dfrac{1}{3}$, то $x = -1$; если $a = \dfrac{1}{2}$, то $x = 1{,}5$.

Пример 11. Решить неравенство: $\frac{a}{x} > x+2$.

Решение. Рассмотрим решение равносильного неравенства: $\frac{x^2+2x-a}{x} < 0$.

$$1)\ \begin{cases} x>0, \\ x^2+2x-a<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0, \\ (x+1)^2<a+1. \end{cases}$$

$$а)\ \begin{cases} a=0, \\ x>0, \\ (x+1)^2<1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a=0, \\ x>0, \\ -1<x+1<1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a=0, \\ x>0, \\ -2<x+1<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a=0, \\ x\in\phi \end{cases}$$

$$б)\ \begin{cases} a>0, \\ x>0, \\ |x+1|<\sqrt{a+1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} a>0, \\ x>0, \\ -\sqrt{a+1}-1<x<\sqrt{a+1}-1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a>0, \\ 0<x<\sqrt{a+1}-1; \end{cases}$$

$$в)\ \begin{cases} a<0, \\ x>0, \\ |x+1|<\sqrt{a+1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} a<0, \\ x>0, \\ x\in\phi. \end{cases} \qquad \begin{cases} a<0, \\ x\in\phi. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x<0, \\ x^2+2x-a<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<0, \\ (x+1)^2<a+1. \end{cases}$$

$$а)\ \begin{cases} a=0, \\ x<0, \\ (x+1)^2>1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a=0, \\ x<0, \\ \left[\begin{array}{l} x+1>1, \\ x+1<-1; \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} a=0, \\ x<0, \\ \left[\begin{array}{l} x>0, \\ x<-2; \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} a=0, \\ x<-2 \end{cases}$$

$$б)\ \begin{cases} -1<a<0, \\ x<0, \\ |x+1|>\sqrt{a+1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} -1<a<0, \\ x<0, \\ \left[\begin{array}{l} x>\sqrt{a+1}-1, \\ x<-\sqrt{a+1}-1; \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} -1<a<0, \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{a+1}-1<x<0, \\ x>\sqrt{a+1}-1. \end{array}\right. \end{cases}$$

$$в)\ \begin{cases} a=-1, \\ x<0, \\ (x+1)^2>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-1, \\ x<0, \\ x\neq-1; \end{cases} \qquad г)\ \begin{cases} a<-1, \\ x<0, \\ (x+1)^2>a+1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a<-1, \\ x<0, \\ x\in R; \end{cases} \qquad \begin{cases} a<-1, \\ x<0. \end{cases}$$

$$д)\ \begin{cases} a>0, \\ x<0, \\ |x+1|>\sqrt{a+1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} a>0, \\ x<0, \\ \left[\begin{array}{l} x>\sqrt{a+1}-1, \\ x<-\sqrt{a+1}-1; \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} a>0, \\ x<-\sqrt{a+1}-1. \end{cases}$$

3) Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

если $a < -1$, то $x < 0$;

если $a = -1$, то $x<0,\ \ x\neq -1$;

если $-1 < a < 0$, то $x<-\sqrt{a+1}-1$ или $\sqrt{a+1}-1<x<0$; если $a = 0$, то $x < -2$;

если $a > 0$, то $0<x<\sqrt{a+1}-1$ или $x<-\sqrt{a+1}-1$.

6. Иррациональные уравнения и неравенства

Пример 12. Решить уравнение $\sqrt{x-a}=x-1$.

Решение. 1) Данное уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} x-1\geq 0, \\ x-a=(x-1)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq 1, \\ x-a=x^2-2x+1; \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq 1, \\ x^2-3x+a+1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq 1, \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{5-4a}}{2} \end{cases}$$

2) Полученная смешанная система равносильна совокупности систем:

$$\text{а)} \begin{cases} x\geq 1, \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5-4a}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{3+\sqrt{5-4a}}{2}\geq 1, \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5-4a}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{5-4a}\geq -1, \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5-4a}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} a\leq -1{,}25 \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5-4a}}{2} \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} x\geq 1, \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5-4a}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{5-4a}}{2}\geq 1, \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5-4a}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{5-4a}\leq 1, \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5-4a}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 0\leq 5-4a\leq 1, \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5-4a}}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\leq a\leq 1{,}25 \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5-4a}}{2} \end{cases}$$

3) Обобщим полученные результаты и запишем ответ:

если $a<1$, то $x=\dfrac{3+\sqrt{5-4a}}{2}$; если $1\leq a\leq 1{,}25$, то $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5-4a}}{2}$; если $a>1{,}25$, то коней нет.

Пример 13. Для каждого a найти решения неравенства $(x-a)\sqrt{x-1}\geq 0$.

Решение. 1) Найдем область определения неравенства: $x\geq 1$ – и заметим, что выражения $\sqrt{x-1}$ и $x-1$ либо положительны, либо равны нулю.

2) Заменим исходное неравенство равносильной системой неравенств $\begin{cases} x\geq 1, \\ (x-a)(x-1)\geq 0 \end{cases}$ и решим второе неравенство:

$$\text{а)} \begin{cases} a<1, \\ \left[\begin{array}{l} x\leq a, \\ x\geq 1. \end{array}\right. \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} a=1, \\ (x-1)^2\geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a=1, \\ x\in R \end{cases} \quad \text{в)} \begin{cases} a>1, \\ x\leq 1, \\ x\geq a. \end{cases}$$

3) Решим систему: $\begin{cases} x\geq 1, \\ (x-a)(x-1)\geq 0; \end{cases}$

а) $\begin{cases} x \ge 1, \\ a < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x \le a, \\ x \ge 1; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} a < 1, \\ x \ge 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \ge 1, \\ a = 1, \\ x \in R; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 1, \\ a = 1, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x \ge 1, \\ a > 1, \\ \left[\begin{array}{l} x \ge a, \\ x \le 1; \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ x \ge a; \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1, \\ x = 1. \end{cases} \end{array}\right.$

4) Обобщим полученные результаты и запишем ответ:
если $a \le 1$, то $x \ge 1$; если $a > 1$, то $x \ge a$ или $x = 1$.

Задания для самостоятельного решения

1. Решите уравнения:

а) $ax^2 - (a-1)x + 2a - 1 = 0$; б) $2x + 3 = 2a + 3x$; в) $\dfrac{x^2 - (2a+1)x + a^2 + a}{x-3} = 0$

2. Решите неравенства:

а) $ax^2 + 6x - 4 < 0$; б) $\dfrac{x^2 - a}{x+3} \le 0$; в) $(x-3)(x+a) < 0$.

3. При каких a уравнение $(a+2)x^2 + 2(a+2)x + 2 = 0$ имеет единственный корень?

4. При каких a уравнение $a(x-1) = x - 2$ имеет решение, удовлетворяющее условию $x > 1$?

5. Найти все значения параметра *a,* при которых сумма кубов корней квадратного уравнения $x^2 - ax + a = 0$ больше суммы их квадратов.

6. Найти все значения параметра *a,* при которых сумма кубов корней квадратного уравнения $x^2 - 2ax + 3a = 0$ больше суммы их квадратов.

7. Найти все значения параметра *a*, при которых неравенство $\sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{\dfrac{2-x}{x+4}} \ge ax + 2 - \sqrt{\dfrac{x+1}{5-x}}$ не имеет решений.

8. Решить уравнение при всех допустимых значениях параметра

$$x^2 - 4x\cos(x-a) + 4 = 0$$

9. Найти все значения параметра *a*, при каждом их которых уравнение $8x^6 + 2x^2 = (3x+5a)^3 + 3x + 5a$ не имеет корней.

10. Найти все значения параметра *a*, при каждом их которых уравнение $27x^6 + (4a-2x)^3 + 6x^2 + 8a = 4x$ не имеет корней.

11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x - a\cos x} = a$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

12. Сколько корней в зависимости от a имеет уравнение

$$4\sin^3 x = a + 7\cos 2x?$$

13. При каком значении параметра a уравнение $(x-2a)\ln(x-1)=0$ имеет единственный корень?

14. Для каждого a решить неравенство $\log_{\sqrt{3}ctga}(x+1) > 2\log_{\sqrt{3}ctga}(x+1)$

15. Найти все значения параметра a, при которых на множестве решений неравенства $21x + |3x - a| \le 4a - x$ нет целых положительных решений.

16. При каких положительных значениях a неравенство $x^4 - 6ax^2 + 5a^2 \le 0$ выполняется при всех x из заданного промежутка $[1;2]$?

17. При каких значениях параметра a неравенство $\left|\frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1}\right| < 3$ выполняется при любых x?

Мендель В.В., к.ф.-м.н.,
директор ПИ ФГБОУ ВО ТОГУ

КОНФИГУРАЦИИ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФИГУРАХ ПЛОСКОСТИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Введение

При решении многих задач планиметрии возникают различные конфигурации, в которых участвуют треугольник и окружность. Знание наиболее распространенных комбинаций и их свойств позволяет получать короткие и красивые решения сложных на первый взгляд задач. К таким конструкциям в первую очередь относятся «треугольник и описанная окружность», «треугольник и вписанная окружность», которые довольно подробно изучаются в школьном курсе, в меньшей степени изучаются конструкции «треугольник и вневписанная окружность», «треугольник и окружность, проходящая через две его вершины», «треугольник и окружность, касающаяся двух его сторон» и другие.

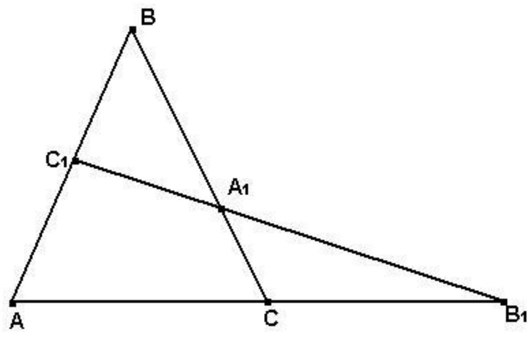
Взгляд на планиметрию через призму конструкций дает нам возможность по-новому посмотреть на хорошо знакомый материал, связать его с новыми знаниями, укрепив их через практическое применение к решению задач.

1. Вспомогательные конструкции и их свойства

В этой части мы рассмотрим некоторые важные конфигурации, в которых участвуют треугольник, окружность, прямая или угол.

1.1. Треугольник и секущая, теорема Менелая

Секущей будем называть прямую, которая пересекает некоторую геометрическую фигуру: треугольник, окружность, угол и т.п. Иногда удобно брать не только точки пересечения фигуры и секущей, но и некоторые дополнительные точки: например, точку пересечения прямой, на которой лежит сторона треугольника и секущей.



Рассмотрим секущую треугольника. К ней относится одна замечательная теорема – ***теорема Менелая***, которая связывает отношения длин отрезков, на которые секущая делит стороны треугольника.

Теорема Менелая. *Пусть* ΔABC *пересечен прямой, не параллельной стороне* AC *и пересекающей две его стороны* AB *и* BC *соответственно в точках* C_1 *и* A_1*, а прямую* AC *в точке* B_1 *. Тогда*

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1. \quad \textbf{(1)}$$

Справедлива также обратная теорема Менелая.

Теорема, обратная теореме Менелая. *В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 принадлежат прямым BC, AC, AB соответственно, тогда, если* $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$*, точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.*

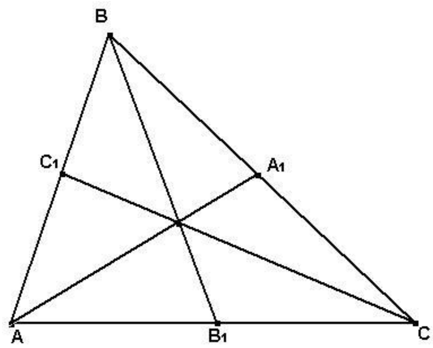
Упражнение 1. *Докажите теорему Менелая.* (Указание: опустите на секущую перпендикуляры из вершин треугольника и рассмотрите пары получившихся подобных прямоугольных треугольников. Заменив в (1) отношения гипотенуз на отношения соответствующих катетов и выполнив сокращения, получите нужный результат.)

Упражнение 2. *Докажите теорему, обратную теореме Менелая.* (Указание: воспользуйтесь методом «от противного». Предположите, что, например, точка A_1 не лежит на секущей. Тогда секущая пересечет сторону BC в некоторой точке A_2, для которой выполнена прямая теорема Менелая. Далее самостоятельно получите противоречие.)

1.2. Треугольник и точка, теорема Чевы

Второй интересной конструкцией, которую мы рассмотрим, является треугольник, у которого три отрезка, проведенных из вершин на противоположные стороны или их продолжения, пересекаются в одной точке.

Свойства этой конструкции описывает теорема Чевы.



Теорема Чевы. *В произвольном треугольнике ABC на сторонах BC, CA, AB или их продолжениях взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1. Если прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в некоторой внутренней точке Z треугольника ABC, то выполнено условие*

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1. \quad \textbf{(2)}$$

Так же, как и в случае теоремы Менелая, для теоремы Чевы справедливо обратное утверждение.

Теорема, обратная теореме Чевы. *Если в произвольном треугольнике ABC на сторонах BC, CA, AB или их продолжениях взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1, для которых выполнено условие*

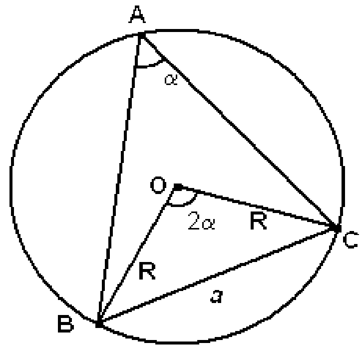
$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1,$$

то прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Упражнение 3. *Докажите теорему Чевы.* (Указание: попробуйте записать условие теоремы Менелая для треугольников ABB_1 и B_1BC и секущих CC_1 и AA_1, а затем исключите из этих равенств «лишние» отрезки.)

Упражнение 4. *Докажите теорему, обратную теореме Чевы.* (Указание: вновь используйте метод доказательства «от противного».)

1.3. Вписанный угол. Теорема синусов



Свойства угла, вписанного в окружность, подробно изучаются в школьном курсе геометрии. Тем не менее эта конструкция достойна отдельного упоминания, так как из нее можно получить очень полезное доказательство теоремы синусов.

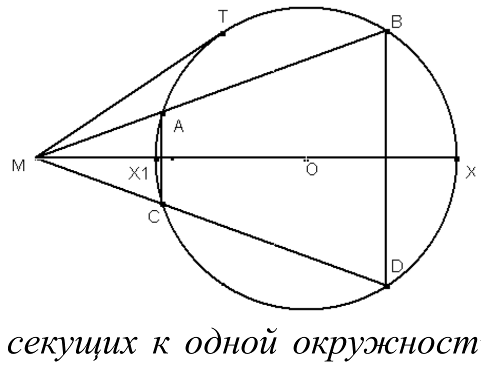
Теорема о вписанном угле. *Величина угла, вписанного в окружность, равна половине величины центрального угла, опирающегося на ту же дугу.*

Теорема синусов. *В произвольном треугольнике отношения длин сторон треугольника к синусам противолежащих углов есть постоянная величина, равная диаметру описанной вокруг этого треугольника окружности.*

Упражнение 5. *Докажите теорему синусов.* (Указание: воспользуйтесь рисунком и выразите длину хорды (стороны треугольника) через радиус окружности и величину центрального угла.)

1.4. Окружность и касательная, окружность и секущая. Теоремы о свойствах секущих

Вспомогательная конструкция «окружность-секущая» часто встречается в разных задачах. Более того, она связана с важным понятием «степень точки относительно окружности».



Рассмотрим несколько конструкций, которые для удобства собраны на одном чертеже.

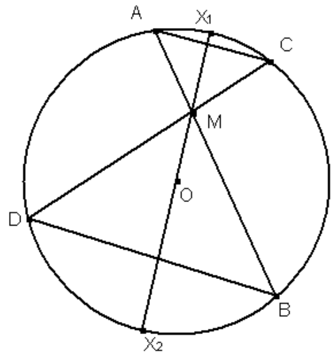
Перечислим некоторые их свойства.

Свойство 1. *Длины отрезков касательных, проведенных к одной окружности из одной точки M, равны* ($MT^2=MO^2-R^2$).

Свойство 2. *Произведения отрезков двух секущих к одной окружности равны* ($MA\cdot MB= MC\cdot MD$).

Свойство 3. *Произведение отрезков внешней секущей равно квадрату отрезка касательной, проведенной из той же точки* ($MA\cdot MB=MT^2=MO^2-R^2$).

Далее рассмотрим случай, когда *точка расположена внутри окружности*.



Свойство 4 (аналог свойства 2). *Произведения отрезков двух секущих к одной окружности равны* (MA·MB= MC·MD).

Свойство 5 (аналог свойства 3). *Произведение отрезков внутренней секущей равно разности квадратов радиуса и расстояния от точки до центра окружности* ($MA \cdot MB = R^2 - MO^2$).

Упражнения 6–10. *Докажите свойства 1–5.*

2. Основные конструкции

В этой части мы рассмотрим основные конструкции, которые образуют треугольник и окружность.

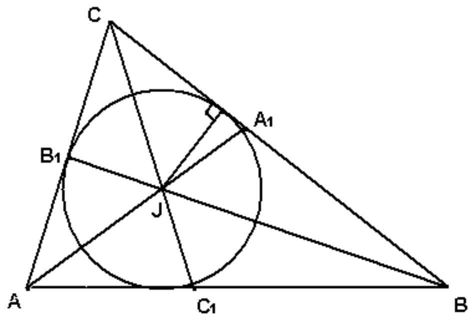
2.1. Треугольник и описанная окружность

Центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

У *остроугольного* треугольника эта точка находится внутри, у *прямоугольного* – на середине гипотенузы, а у *тупоугольного* – вне треугольника.

Упражнение 11. *Докажите, что если два треугольника имеют общую сторону, то прямая, проходящая через центры описанных окружностей этих треугольников, делит такую сторону пополам (проходит через середину стороны).*

Из *теоремы о вписанном угле* следует, что из центра описанной окружности каждая сторона видна под углом, в два раза большем, чем противолежащий угол треугольника. Используйте это свойство для решения следующего упражнения.



Упражнение 12. *Выразить стороны треугольника через его углы и радиус описанной окружности.*

Упражнение 13. *Докажите для произвольного треугольника следующую формулу:* $R = \dfrac{abc}{4S}$, *здесь a, b и c – стороны, R – радиус описанной окружности, S – площадь треугольника.* (Указание: используйте выражение для стороны *c* из предыдущего упражнения и формулу для площади треугольника $S = \dfrac{1}{2} ab \sin\gamma$).

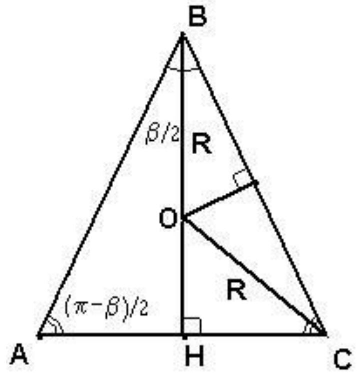
2.2. Частные случаи: прямоугольный, равнобедренный и равносторонний треугольник

Как уже отмечалось выше, у прямоугольного треугольника центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы. Отсюда следует, что *радиус описанной вокруг прямоугольного треугольника окружности равен половине его гипотенузы*.

Справедлива также следующая теорема.

Теорема. *Если радиус описанной окружности некоторого треугольника равен половине длины одной из его сторон, то этот треугольник – прямоугольный.*

Упражнение 14. *Докажите теорему.* (Указание: покажите, что центр описанной окружности лежит на середине стороны треугольника, и найдите синус противоположного угла с помощью теоремы синусов.)



Рассмотрим теперь равнобедренный треугольник. Так как высота, проведенная к основанию такого треугольника, одновременно является серединным перпендикуляром и биссектрисой, то центр описанной окружности лежит на высоте (или ее продолжении).

Упражнение 15. *Выразите отношение радиуса описанной окружности равнобедренного треугольника к его высоте через угол при вершине этого треугольника.*

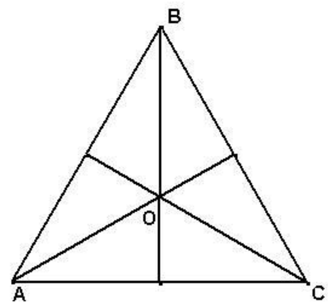
Рассмотрим, наконец, равносторонний, или правильный, треугольник. В этом треугольнике высоты являются медианами, биссектрисами и серединными перпендикулярами. Поэтому центр описанной окружности совпадает с точкой пересечения медиан.

Так как точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении 2 к 1, считая от вершины, то радиус описанной окружности равен двум третьим от высоты. Таким образом, $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, где a – сторона треугольника.

Упражнение 16. *Выразите высоту, сторону и площадь равностороннего треугольника через радиус описанной окружности.*

2.3. Треугольник и вписанная (вневписанная) окружность

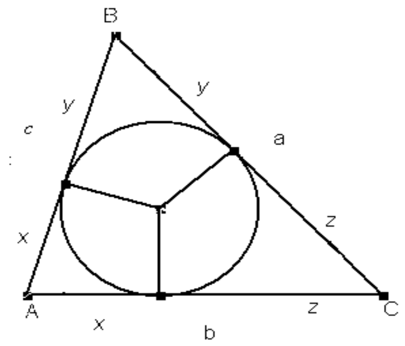
Центр *вписанной* окружности лежит на пересечении биссектрис внутренних углов треугольника. Радиус этой окружности и точки касания можно определить, опустив перпендикуляр из центра на сторону. Довольно распространенной является такая ошибка: за точку касания окружности и стороны принимают точку пересечения стороны и биссектрисы.



Рассмотрим некоторые свойства описанного треугольника.

Пусть x, y, z – отрезки, на которые точки касания вписанной окружности делят стороны треугольника. Эти отрезки можно выразить через стороны треугольника, решив следующую систему уравнений:

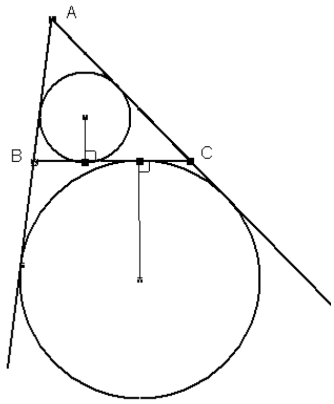
$$\begin{cases} x+y=c \\ y+z=a \\ x+z=b. \end{cases}$$



Получим:

$$\begin{cases} 2x=b+c-a \\ 2y=a+c-b \\ 2z=a+b-c. \end{cases}$$

Упражнение 17. *Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности, лежащими на противоположных сторонах, пересекаются в одной точке.*



Если вписанные окружности всем хорошо знакомы, то *вневписанные* встречаются реже. Поясним, чем они отличаются от вписанных.

Центр вневписанной окружности лежит вне треугольника. Это точка пересечения биссектрис одного внутреннего и двух внешних углов треугольника.

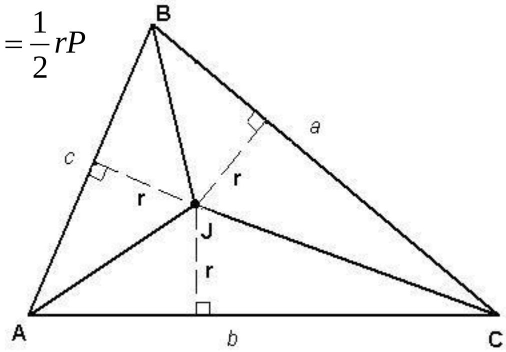
Вневписанная окружность касается одной стороны и продолжений двух других сторон треугольника. Для треугольника существует три вневписанных окружности. (На рисунке изображены вписанная и вневписанная окружности. Хорошо видно, что точки касания этих окружностей со стороной треугольника не совпадают.)

Упражнение 18. *Выразите длины отрезков касательных, проведенных из вершин треугольника к вневписанной окружности, через длины сторон этого треугольника.* (Указание: используйте метод, который был применен к вписанной окружности.)

Найдем выражения для радиусов вписанной и вневписанных окружностей. Начнем со случая вписанной окружности. «Разрежем» треугольник на три треугольника так, как показано на рисунке. Каждый из них имеет высоту, равную радиусу вписанной окружности. Сумма площадей трех треугольников равна площади большого:

$$S=S_1+S_2+S_3=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}rP$$

.



Отсюда легко получить формулу для вычисления радиуса вписанной окружности:

$$r=\frac{2S}{P}.$$

Радиусы вневписанных окружностей можно получить аналогично. Представим площадь треугольника ABC так:

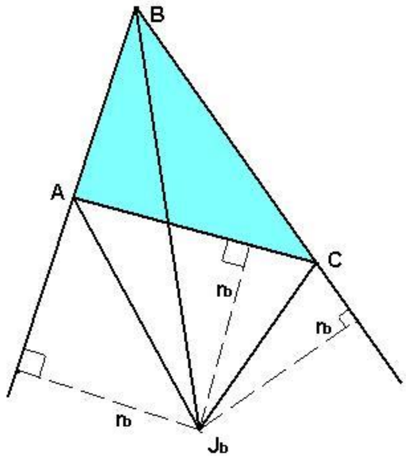
$$S = S_{ABJ_b} + S_{CBJ_b} - S_{ACJ_b} \ .$$

Далее применим те же рассуждения, что и ранее. В результате получим следующую формулу:

$$r_b = \frac{2S}{a+c-b}.$$

Упражнение 19. *Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания сторон или продолжений сторон этого треугольника с вневписанной окружностью, пересекаются в одной точке.* (Указание: используйте теорему Чевы.)

2.4. Расстояние между центрами описанной и вписанной (вневписанной) окружностей



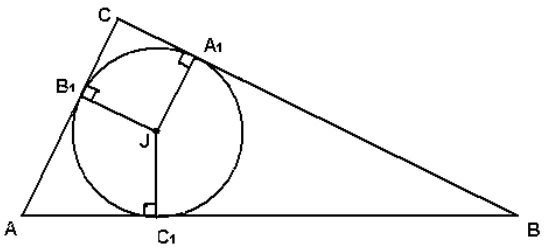
Замечательный математик Леонард Эйлер вывел замечательную формулу, выражающую расстояние между центрами описанной и вписанной (вневписанной) окружностей треугольника. Вот она:

$OJ^2 = R^2 - 2Rr$ – для вписанной,

и $OJ_b^2 = R^2 + 2Rr_b$ – для вневписанной окружности.

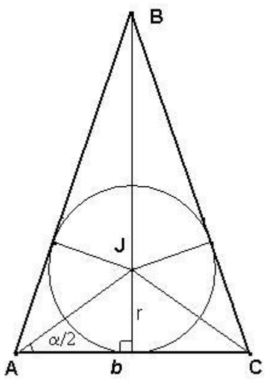
Между прочим, из первой формулы следует, что радиус вписанной окружности не менее чем в два раза меньше радиуса описанной окружности. Как мы увидим ниже, равенство выполняется только для равностороннего треугольника.

2.5. Частные случаи: прямоугольный, равнобедренный и равносторонний треугольник



Для прямоугольного треугольника имеется очень изящная формула, выражающая радиус вписанной окружности через его стороны:

$$2r = a + b - c\,.$$

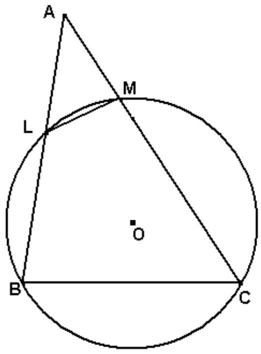


Упражнение 20. *Докажите эту формулу.* (Указание: покажите, что точки C, A_1, J, B_1 являются вершинами квадрата, сторона которого равна радиусу вписанной окружности, и примените формулы, выражающие отрезки касательных через стороны треугольника.)

Для радиуса вписанной окружности равнобедренного треугольника можно получить простое выражение через основание и угол при нем (смотри чертеж):

$$r = \frac{b}{2} tg \frac{\alpha}{2}.$$

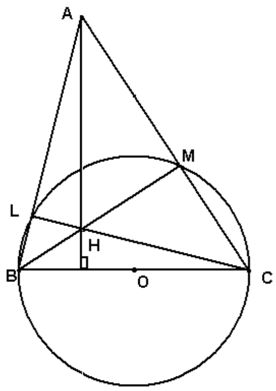
2.6. Окружность, проходящая через две вершины треугольника



Чаще всего в геометрических задачах встречается конфигурация, в которой окружность проходит только через две вершины треугольника, при этом вторично пересекая две его стороны. В такой конструкции появляются два подобных треугольника ABC и AML, у которых соответственные стороны ML и BC не параллельны.

Рассмотрим некоторые примеры, в которых появляется такая конструкция.

Пример 1. *Окружность, проходящая через две вершины и основания двух высот треугольника (в этом случае сторона AC будет диаметром окружности).*



В этой конфигурации коэффициент подобия треугольников равен косинусу угла при третьей вершине: $k = \cos \angle A$.

Упражнение 21. *Докажите сформулированное выше утверждение.* (Указание: выразите отрезки AM и AL через стороны треугольника и угол A.)

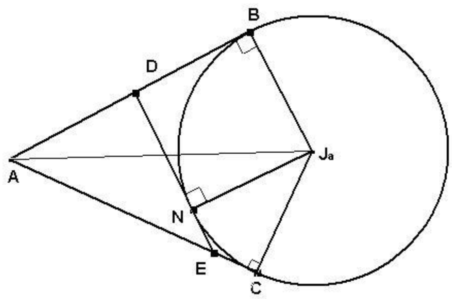
Взглянем на эту же конструкцию с другой стороны.

Пример 2. *Пусть одна из сторон треугольника (например, BC) является диаметром окружности, а L и M – точками пересечения окружности с двумя другими сторонами. Тогда из этих точек диаметр окружности виден под прямым углом.*

Нетрудно увидеть, что отрезки BM и CL являются высотами треугольника.

Упражнение 22. *Окружность, диаметром которой служит одна из сторон треугольника, пересекает другую сторону в точке, являющейся ее серединой. Докажите, что данный треугольник – равнобедренный.*

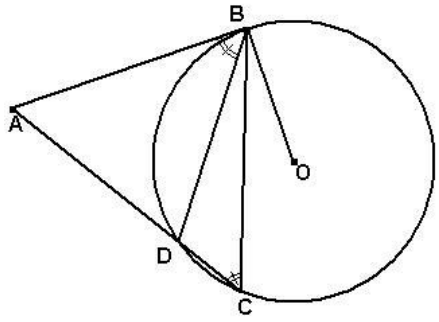
2.7. Окружность, касающаяся двух сторон треугольника



На математических олимпиадах нередко предлагаются задачи, в которых рассматриваются либо угол и вписанная в него окружность, либо равнобедренный треугольник, касающийся некоторой окружности в двух своих вершинах. При этом обычно присутствует еще один элемент: секущая угла, касающаяся окружности в некоторой точке.

При решении задач бывает полезно следующее свойство, которое кажется очевидным: *длина отрезка DE равна сумме длин отрезков DB и EC*.

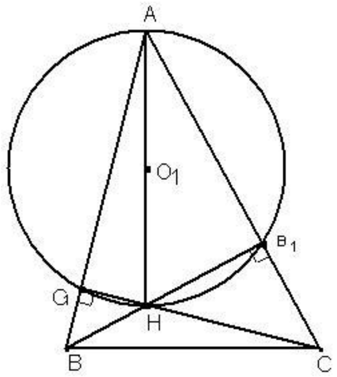
2.8. Окружность, касающаяся одной из сторон треугольника в вершине



Так как *угол между хордой и касательной к окружности равен половине центрального угла, опирающегося на хорду*, то изображенные на чертеже треугольники ABD и ABC имеют равные углы при вершинах B и C соответственно. А если учесть, что угол при вершине A у них общий, то нетрудно заметить, что два этих треугольника подобны.

Упражнение 23. *Дайте строгое доказательство сформулированного выше утверждения.*

2.9. Еще раз о высотах треугольника

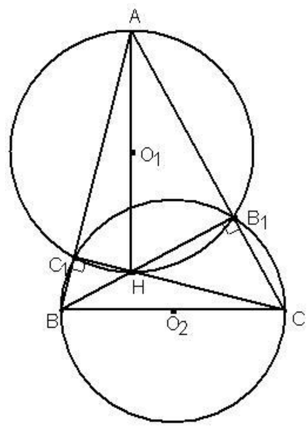


Через точку пересечения высот треугольника (ортоцентр), основания двух высот и третью вершину проходит окружность. *Отрезок AH является диаметром этой окружности.*

Рассмотрим теперь сразу две окружности, проходящие через основания высот.

Упражнение 24. *Докажите, что прямая O_1O_2 перпендикулярна прямой C_1B_1.*

2.10. Продолжение темы о двух окружностях



С парой пересекающихся окружностей и треугольником связан ряд интересных конфигураций.

Первая конструкция. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена секущая CD.

Упражнение 25. Докажите, что какая бы не была взята секущая, будут получаться подобные треугольники ACD.

Вторая конструкция. Две окружности пересекаются в точках A и B. CD – отрезок общей касательной к этим окружностям.

Упражнение 26. *Исследуйте свойства треугольника ACD.* (Смотри чертеж.)

Упражнение 27. *Выразите стороны треугольника ACD через радиусы окружностей и длину хорды AB.*

Задачи для самостоятельного решения

1. Две окружности внешне касаются в точке *A*, *BC* – их общая внешняя касательная. Доказать, что $\angle BAC = 90^o$.

2. Две окружности пересекаются в точках *A* и *B*. Точки *A* и *B* лежат по разные стороны от прямой *l*, которая пересекает окружности соответственно в точках *C*, *D*, *E* и *M*. Доказать, что сумма углов *DBE* и *CAM* равна 180°.

3. Две окружности пересекаются в точках *A* и *B*. Прямые l_1 и l_2 параллельны, причем l_1 проходит через точку *A* и пересекает окружности в точках *E* и *K*, а l_2 проходит через точку *B* и пересекает окружности в точках *M* и *P*. Доказать, что четырехугольник *EKMP* – параллелограмм.

4. Из точки *M* проведены к окружности с центром в точке O касательные *MA* и *MB*. Прямая *l* касается окружности в точке C и пересекает *MA* и *MB* соответственно в точках D и *E*. Доказать, что: а) периметр треугольника *MDE* не зависит от выбора точки C; б) угол *DOE* не зависит от выбора точки C.

5. Точки *A, B,* C и D делят окружность на части, отношение которых 1 : 3 : 5 : 6. Найти углы между касательными к окружности, проведенными в точках *A, B, C* и *D*.

6. Две равные окружности внешне касаются друг друга и третьей окружности, радиус которой равен 8 см. Отрезок, соединяющий точки касания двух равных окружностей с третьей, равен 12 см. Найти радиусы равных окружностей.

7. Общая хорда двух пересекающихся окружностей равна *a* и служит для одной окружности стороной правильного вписанного шестиугольника, а для другой – вписанного квадрата. Найти расстояние между центрами окружностей.

8. Две окружности радиусами *R* и R_1 касаются внешним образом. Найти длину их общей внешней касательной.

9. Две окружности радиусами *r* и *R* касаются внешним образом. Прямая *1* пересекает окружности в точках *A*, *B*, C и D так, что *AB* = *BC* = *CD*. Найти *AD*.

10. Две окружности, радиусы которых относятся как 1 : 3, касаются внешним образом, длина их общей внешней касательной $6\sqrt{3}$ см. Найти периметр фигуры, образованной внешними касательными и внешними дугами окружностей.

11. Из внешней точки к окружности проведены секущая длиной 48 см и касательная, длина которой составляет $\frac{2}{3}$ от внутреннего отрезка секущей. Найти радиус окружности, если известно, что секущая удалена от центра на расстояние 24 см.

12. Общая внешняя касательная двух внешне касающихся окружностей составляет с линией центров угол *a*. Найти отношение радиусов.

13. Из точки *A*, расположенной вне круга с центром O, проведены секущие *ABC* и *AMK* (*B* и *M* – ближайшие к *A* точки окружности, лежащие на секущих). Найти *BC*, если известно, что $AC = a, \angle CAO = \alpha, \angle COK = \beta$ и секущая *AMK* проходит через центр окружности.

14. Две окружности пересекаются в точках *A* и *B*. Через точку *A* проведены отрезки *AC* и *AD*, каждый из которых, являясь хордой одной окружности, касается другой окружности. Доказать, что $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$.

15. *AB* и *CD* – взаимно перпендикулярные пересекающиеся хорды окружности радиуса *R*. Доказать, что $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

16. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки *M*, взятой на диаметре окружности, до концов любой из параллельных этому диаметру хорд есть для данной окружности постоянная величина.

17. Две окружности внешне касаются в точке *C*, *AB* – их общая внешняя касательная. Найти радиусы, если *AC* = 8 см, *BC* = 6 см.

18. Окружности радиусами *R* и $\frac{R}{2}$ касаются внешним образом. Из центра меньшей окружности под углом 30° к линии центров проведен отрезок длиной 2*R*. Найти длины тех частей отрезка, которые лежат вне окружностей.

19. Окружности радиусами *a* и *b* имеют внутреннее касание ($a < b$), причем центр большей окружности лежит вне меньшей окружности. Хорда *AB* большей окружности касается меньшей окружности и образует с общей касательной к окружностям угол α. Найти *AB*.

20. В правильном треугольнике *ABC* на сторонах *AB* и *AC* взяты точки *M* и *K* так, что *AM* : *MB* = 2 : 1, *AK* : *KC* = 1 : 2. Доказать, что отрезок *KM* равен радиусу окружности, описанной около треугольника *ABC*.

21. Около треугольника *ABC* (*AB* = *BC*) описана окружность. Биссектрисы углов *A* и С при продолжении пересекают окружность в точках *K* и *P*, а друг друга в точке *E*. Доказать, что четырехугольник *BKEP* – ромб.

22. *AD* и *CE* – биссектрисы треугольника *ABC*. Окружность, описанная около треугольника *BDE*, проходит через центр окружности, вписанной в треугольник *ABC*. Доказать, что $\angle ABC = 60°$.

23. Доказать, что центр окружности, вписанной в треугольник, лежит внутри треугольника, образованного средними линиями данного треугольника.

24. Прямая *l* касается окружности, описанной около треугольника *ABC*, в точке С. Доказать, что квадрат высоты *CH* треугольника *ABC* равен произведению расстояний точек *A* и *B* от прямой *l*.

25. Найти углы треугольника, если известно, что центры его вписанной и описанной окружностей симметричны относительно одной из сторон треугольника.

26. Основание равнобедренного треугольника 2*a*, высота *h*. К окружности, вписанной в треугольник, проведена касательная, параллельная основанию. Найти длину отрезка этой касательной, заключенного между боковыми сторонами треугольника.

27. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 24 и 36 см. Найти катеты.

28. В прямоугольном треугольнике один катет равен 48 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 3,92 см. Найти длину вписанной окружности.

29. В прямоугольном треугольнике с катетами 18 и 24 см найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

30. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, в 1,5 раза меньше радиуса описанной окружности. Найти угол при основании.

31. Найти радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами a и b и углом γ между ними.

32. В равнобедренном треугольнике основание равно b, угол при основании a. К окружности, вписанной в треугольник, проведена касательная, параллельная основанию. Найти длину отрезка этой касательной, заключенного между боковыми сторонами треугольника.

33. В равнобедренном треугольнике отношение радиусов вписанной и описанной окружностей равно k. Найти углы треугольника.

34. Доказать, что для любого прямоугольного треугольника справедливо неравенство $0.4< \frac{r}{h} < 0.5$, где r – радиус вписанной окружности, а h – высота, опущенная на гипотенузу.

35. Доказать, что окружность, описанная около треугольника, равна окружности, проходящей через две его вершины и ортоцентр.

36. В окружность вписан правильный треугольник ABC. На дуге BC взята произвольная точка M и проведены хорды AM, BM и CM. Доказать, что $AM = BM+CM$.

37. Доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин вписанного в нее правильного треугольника есть величина постоянная, не зависящая от положения точки на окружности.

38. В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$. На дуге AB взята произвольная точка K и соединена хордами с вершинами треугольника. Доказать, что $AK \cdot KC = AB^2 - KB^2$.

39. В остроугольном треугольнике со сторонами a, b и c из центра описанной окружности опущены перпендикуляры на стороны. Длины этих перпендикуляров равны соответственно m, n и p. Доказать, что $\frac{m}{a}+\frac{n}{p}+\frac{p}{c}=\frac{mnp}{abc}$.

40. Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника или на продолжения сторон из произвольной точки описанной около треугольника окружности, лежат на одной прямой.

41. Доказать, что если a и b – стороны треугольника, l – биссектриса угла между ними и a', b' – отрезки, на которые биссектриса делит третью сторону, то $l^2=ab - a'b'$.

42. Доказать, что радиус описанной около треугольника окружности, проведенный в одну из вершин треугольника, перпендикулярен прямой, соединяющей основания высот, проведенных из двух других вершин треугольника.

43. Около треугольника ABC описана окружность. Через точку B проведена касательная к окружности до пересечения с продолжением стороны

CA за точку A в точке D. Найти периметр треугольника ABC, если $AB+AD=AC$, $CD=3$, $\angle BAC = 60^o$.

44. В окружность радиуса R вписан правильный треугольник ABC. Хорда BD пересекает AC в точке E так, что $AE : CE = 2 : 3$. Найти CD.

45. В трапеции $ABCD$ биссектриса угла A пересекает основание BC (или его продолжение) в точке E. В треугольник ABE вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE в точке P. Найти угол BAD, если известно, что $AB : MP = 2$.

46. Гипотенуза прямоугольного треугольника делится точкой касания вписанной окружности на отрезки, отношение которых равно k $(k > 1)$. Найти углы треугольника.

47. Найти угол при основании равнобедренного треугольника, если известно, что его ортоцентр лежит на вписанной окружности.

48. Отрезки AD, BM и CP – медианы треугольника ABC. Окружность, описанная около треугольника DMC, проходит через центроид треугольника ABC. Доказать, что $\angle ABM = \angle PCB$, а $\angle BAD = \angle PCA$.

49. В прямоугольный треугольник вписана полуокружность так, что ее диаметр лежит на гипотенузе, а центр делит гипотенузу на отрезки 15 и 20 см. Найти радиус полуокружности.

50. Окружность проходит через вершину A прямоугольного треугольника ABC, касается катета BC и имеет центр на гипотенузе AB. Найти ее радиус, если $AB = c$, $BC = a$.

51. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке D так, что $AD : DB = 3 : 1$. Найти стороны треугольника ABC, если высота, проведенная к гипотенузе, равна 3 см.

52. Стороны треугольника равны a и b, угол между ними 120^o. Найти радиус окружности, проходящей через две вершины третьей стороны и центр вписанной в данный треугольник окружности.

53. Окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается стороны BC в точке B. Сторона AC делится окружностью на части AM и MC так, что $AM = MC + BC$. Найти BC, если $AC = 4$ см.

54. На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону BC в точке D. Найти AC, если известно, что $CD = 2$ см и $AB = BC = 6$ см.

55. На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая AC в точке D и BC в точке E. Найти AC и BC, если известно, что $AB = 3$ см, $AD : DC = 1 : 1$ и $BE : EC = 7 : 2$.

56. Отрезок BD – высота треугольника ABC, а DE – медиана треугольника BCD. В треугольник BDE вписана окружность, касающаяся стороны BE в точке K и стороны DE в точке M. Найти углы треугольника ABC, если $AB = BC = 8$ см, $KM = 2$ см.

57. В треугольнике ABC проведены высота AD и окружность с центром в точке A и радиусом AD. Найти длину дуги этой окружности, лежащей внутри треугольника, если $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.

58. Доказать, что радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов прямоугольного треугольника, равен сумме длин гипотенузы и радиуса окружности, вписанной в треугольник.

59. Биссектрисы *AD* и *CK* треугольника *ABC* пересекаются в точке О, *KD* = 1 см. Найти углы и две другие стороны треугольника *KDO,* если известно, что точка *B* лежит на окружности, описанной около треугольника *KDO.*

60. Окружность касается сторон *AC* и *BC* треугольника *ABC* и имеет центр на *AB.* Найти радиус окружности, если *AC* = 48 см, *BC* = 140 см, *AB* = 148 см.

61. В треугольнике *ABC* точка *D* – середина *AC,* точка *E* – середина *BC,* окружность, описанная около треугольника *CDE,* проходит через центроид треугольника *ABC.* Найти длину медианы *CK,* если *AB* = *c.*

62. Найти зависимость между сторонами *a, b* и *c* треугольника *ABC,* если известно, что вершина С, центроид *M* и середины сторон *AC* и *BC* лежат на одной окружности.

63. В равнобедренный треугольник *ABC* с углом *B,* равным 120°, вписана полуокружность радиуса $(3\sqrt{3}+\sqrt{21})$ см с центром на *AC.* К полуокружности проведена касательная, пересекающая боковые стороны *AB* и *BC* в точках соответственно *D* и *E.* Найти *BD* и *BE,* если *DE* = $2\sqrt{7}$ см.

64. В треугольнике *ABC* известны стороны: *AB* = *BC* = 39 см, *AC* = 30 см. Проведены высоты *AD* и *BE.* Найти радиус окружности, проходящей через точки *D* и *E* и касающейся стороны *BC.*

65. В треугольнике *ABC* проведены высоты *CD* и *AE.* Около треугольника *BDE* описана окружность. Найти длину дуги этой окружности, лежащей внутри треугольника *ABC,* если *AC* = *b,* $\angle ABC = \beta$.